はしがき

本シリーズのねらい——「過去問」の徹底分析による効率的な学習を可能にする

合格したければ「過去問」にあたれ。

あたりまえに思えるこの言葉の、ほんとうの意味を理解している人は、じつは少ないのかもしれません。過去問は、なんとなく目を通して安心してしまうものではなく、徹底的に分析されなくてはならないのです。とにかく数多くの問題にあたり、自力で解答していくうちに、ある分野は繰り返し出題され、ある分野はほとんど出題されないことに気づくはずです。ここまできて初めて、「過去問」にあたれ、という言葉が自分のものにできたといえるのではないでしょうか。

頻出分野が把握できたなら、もう合格への道筋の半分まで到達したといっても過言ではありません。時間を効率よく使ってどの分野からマスターしていくのか、計画と戦略が立てられるはずです。

とはいえ、教養試験も含めると20以上の科目を学習する必要がある公務員試験では、過去問にあたれといっても時間が足りない、というのが実状ではないでしょうか。

そこでTAC公務員講座では、みなさんに代わり全力を挙げて、「過去問」を徹底分析し、この『過去問攻略Vテキスト』シリーズにまとめあげました。

網羅的で平板な解説を避け、不必要な分野は思いきって削り、重要な論点に絞って厳選収録しています。また、図表を使ってわかりやすく整理されていますので、初学者でも知識のインプット・アウトプットが容易にできるはずです。

『過去問攻略Vテキスト』の一冊一冊には、“無駄なく勉強してぜったい合格してほしい”という、講師・スタッフの思いが込められています。公務員試験は長く孤独な戦いではありません。本書を通して、みなさんと私たちは合格への道を一緒に歩んでいくことができるのです。そのことを忘れないでください。そして、必ずや合格できることを心から信じています。

2019年2月 TAC公務員講座

第２版（大改訂版）　はしがき

長年、資格の学校 TAC の公務員対策講座で採用されてきた『過去問攻略Ｖテキスト』シリーズが、このたび大幅改訂されることになりました。

◆より、過去問攻略に特化

資格の学校 TAC の公務員講座チームが過去問を徹底分析。合格に必要な「標準的な問題」を解けるようにするための知識を過不足なく掲載しています。

『過去問攻略Ｖテキスト』に沿って学習することで、「やりすぎる」ことも「足りない」こともなく、必要かつ充分な公務員試験対策を進められます。

合格するために得点すべき問題は、このテキスト１冊で対策できます。

◆より、わかりやすく

執筆は資格の学校 TAC の公務員講座チームで、受験生指導に当たってきた講師陣が担当。受験生と接してきた講師が執筆するからこそ、どこをかみ砕いて説明すべきかがわかります。

読んでわかりやすいこと、講義で使いやすいことの両面を意識した原稿づくりにこだわりました。

◆より、使いやすく

・本文デザインを全面的に刷新しました。
・「過去問 Exercise」などのアウトプット要素も備え、知識の定着と確認を往復しながら学習できます。
・TAC 公務員講座の講義カリキュラムと連動。最適な順序でのインプットができます。

ともすれば 20 科目以上を学習しなければならない公務員試験においては、効率よく試験対策のできるインプット教材が不可欠です。『過去問攻略Ｖテキスト』は、上記のとおりそのニーズに応えるべく編まれています。

本書を活用して皆さんが公務員試験に合格することを祈念しております。

2022 年３月　TAC 公務員講座

〈数的処理（上)〉はしがき

本書は近年の大卒区分公務員試験で合格点を目指すすべての人に向けて書かれた数的処理テキストです。上巻では、数的推理、判断推理を扱っています。

数的処理は公務員試験に占める配点比率が高いことから、合格のためにはおろそかにできない重要科目です。一方で実際の公務員試験を眺めると、実に多様な問題が出題されており、こんなに解けるようになるのかと不安に感じる受験生もいるでしょう。また、一部の分野では数学を道具として使いますが、これに苦手意識のある初学者は、数学や算数からやり直さなければならないのか、と悩んでしまうかもしれません。それも無理からぬことであり、数的処理は多くの受験生にとって負担になる科目ではないでしょうか。

このたびの大改訂では、掲載している問題をTAC公務員講座の講義で実際に使われているものに厳選し、少ない演習で多くの問題が解けるように一層の工夫をしました。各節の冒頭では要点や知識の整理を行い、代表的な例題を通して、問題の「型(かた)」を見せています。しかし、すぐにこれが解けなくても大丈夫です。「正解へのプロセス」で問題文の読み方から解説してありますので、これを読んだ後しばらく考えてみてください。それでも正解できない場合は、解説を読んで理解ができれば十分です。

この理解の助けになるのが、「正解へのプロセス」から「解説」にわたって設けた「タグ」です。タグは問題を解く核心です。判断推理や空間把握と呼ばれる分野など、数的処理には通常の学校教育では触れることのない分野も含まれます。このような分野では、型で問題を分類し、タグで示した手法を繰り返し実践することでスムーズに解答できるようになります。

そのうえで節末に設けた過去問Exerciseに取り組み、吸収してきた知識と解き方の型を実践することで、さらに定着させてください。前から順に読んでいけば、徐々に必要な知識が積み上げられ、本書を読み終わるころには実力が定着するように問題を配置しました。

本書では、数的処理の出題の多くを、独自の分類で「型」として類型化しています。型から漏れるものや出題頻度の低い問題、難度が高いため正答率が低く合否を左右しない問題は省きました。ですから、本書に掲載されている問題は合格に必要な最低限のものであると思って取り組んでください。その取組みそのものが、合格に最大の効果を発揮します。

また、数的処理で用いる算数・数学をはじめとした知識は本書に掲載してあります。高度なものは１つもありませんから、食わず嫌いをせず、どんどん使い慣れてください。本書をしっかり読み込めば、数少ない数的処理の基礎事項だけで、様々なレベル、様々な試験の問題が解けるようになることを実感できるはずです。

2022年３月　TAC公務員講座

本書の使い方

本書は、本試験の広範な出題範囲からポイントを絞り込み、理解しやすいよう構成、解説した基本テキストです。以下は、本書の効果的な使い方ガイダンスです。

本文

●アウトライン
その節のアウトラインを示しています。これから学習する内容が、全体の中でどのような位置づけになるのか、留意しておくべきことがどのようなことなのか、あらかじめ把握したうえで読み進めていきましょう。

●脚注
試験とは直接関係しないものの、学習にあたって参考にしてほしい情報を「脚注」として適宜示しています。

★★★

4 速　さ

「速さ」は文章題の一分野であり、公務員試験でも頻出テーマです。そこで、学習を容易にするために、「旅人算（出会い算と追いかけ算）」、「周回算」、「流水算」、「通過算」、「仕事算」、「ニュートン算」など、定番のテーマに分類しています。解法は、今までに学んだ手法を使っていきますが、単位変換などの新しい手法も登場します。

1 速さの３要素と３公式

1 速さの問題

速さの問題では、ある「速さ」で、いくらかの「時間」をかけて、ある「距離」を移動する人や車などが登場する。この「速さ」、「時間」、「距離」の３要素に関する式を使いながら、未知のものを求める問題が出題される。以下では、速さの問題で登場する３要素とその関係について説明する。

① 速　さ

「速さ」とは、単位時間あたりの変化量を表したものである[1]。

単位時間とは、１秒、１分、１時間、１日、…など、「１」の付く時間のことである。

・１秒あたりの変化量を「秒速」という。
・１分あたりの変化量を「分速」という。
・１時間あたりの変化量を「時速」という。

特に、**移動における速さ**は、単位時間あたりの移動距離で定義される。

以下では、特に断りがない限り、移動における速さを考える。

② 速さの３要素

移動における速さを考えるとき、**速さ・時間・距離（道のり）**を「速さの３要素」という。

1 例えば、ウイルスが増殖する速さやうわさが広がる速さなど、速さには様々なものがある。公務員試験では、仕事の速さなども登場する（後述）。

●重要度

各種公務員試験の出題において、この節の内容がどの程度重要かを示していますので、学習にメリハリをつけるための目安として利用してください。

㊦★☆☆ ←→ ★★★㊤

重要度

例1　一定の速さで歩く人が、200mを５分で移動したとき、この人の歩く速さは１分あたり200÷5＝40［m］である。

また、分速40mで歩く人が200mを移動するには、200÷40＝5［分］かかる。

分速40mで歩く人が５分歩くと、40×5＝200［m］移動する。

この例からもわかるように、**速さの３要素の間には互いにつながり（関係式）がある**。これが、次の「**速さの３公式**」である。

③ 速さの３公式

次の３つの式を「速さの３公式」という。

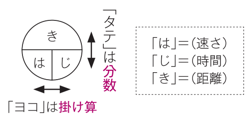
速さの３公式

（速さ）＝（距離）÷（時間）＝$\dfrac{（距離）}{（時間）}$

（時間）＝（距離）÷（速さ）＝$\dfrac{（距離）}{（速さ）}$

（距離）＝（速さ）×（時間）

速さの３公式の覚え方



※求めたいものを隠すと、式が現れる。

※　１つの式からスタートして変形すれば、残りの２つの式は簡単に導出できる。

2 単位換算

速さの問題を解く際に、単位（基準）を揃える必要が生じる。このとき、次のように単位換算を行う。

① 時間について

１時間＝60分、$\frac{1}{60}$時間＝１分

１分＝60秒、$\frac{1}{60}$分＝１秒

より、図１のように単位換算できる。

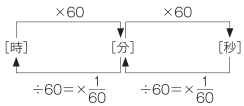


図１

（※図はいずれもサンプルです）

●例

具体例を挙げながら知識やテクニックを実践する様子を示しています。

●公式・知識

覚えておきたい公式や知識についてまとめています。

例題

●問題
ここまでの学習内容を身に付けられているかをチェックするための、TACオリジナル問題です。まずは自分で考えてみましょう。

例題 1-14 ある遊園地では、開園前に行列が300人以上できた場合には、時間を繰り上げて開園することにしている。その日は開園前から入園希望者が毎分20人の割合で並び始めたので、開園前に行列が300人となり、その時点で開園した。開園後も同様の割合で行列に加わる者が続いたが、入場口を１つだけ開けたところ、15分で行列が解消した。入場口を２つ開けて開園していたとき、行列が解消する時間として、正しいのはどれか。

1 ３分
2 ５分
3 ７分
4 ９分
5 11分

正解へのプロセス

本問は、入り口に滞った人を入場口が捌く**処理の速さの問題**であり、入り口には時々刻々人が流れ込むため、**全体量が増加する**ことがわかる。したがって、**本問は**「**ニュートン算**」**の問題**である。 **テーマの把握**

ニュートン算では公式を使って立式していけばよい。 **解法のポイント**

本問は「行列が解消する」ことから、処理が終了するので、

（はじめの量）＋（増加の速さ）×（時間）－（減少の速さ）×（時間）＝0

を用いる。 **公式**

そこで、ニュートン算の公式に対応する量を問題文を読みながら確認していく。

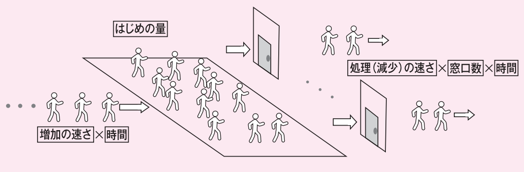
「その日は開園前から入園希望者が毎分20人の割合で並び始めた」より、**（増加の速さ）＝20［人/分］**である。「開園前に行列が300人となり、その時点で開園した」より、「その時点」がこの問題の処理のスタート（「はじめ」）になるので、**（はじめの量）＝300［人］**である。「入場口を１つだけ開けたところ」、「入場口を２つ開けて」とあるので、**入場口が「処理」を行っており、入場口が複数ある**。このように、**処理するものが複数あるときは、１つあたりで処理できる量を考える**と立式がうまくいく。つまり、（入場口**１つあたりの**処理（減少）の速さ）＝x［人/分］とおけば、「入場口を１つだけ開けたところ」の**（処理（減少）の速さ）＝x［人/分］**であり、**２つ開けると２倍の速さで処理できる**ことより、「入場口を２つ開けて開園していたとき」の**（処理（減少）の速さ）＝$2x$［人/分］**と表せる。

そして、「**入場口を２つ開けて開園していたとき、行列が解消する時間**」＝t［分］

●正解へのプロセス
問題を解くための着眼点や考えの進め方、それぞれの段階でこれまでに習得したどの知識を使うべきかなど、問題の正解に至るためのプロセスを具体的に示しています。問題への取り組み方をある程度パターン化して捉えられるよう、**テーマの把握**、**公式**など、検討のポイントになる要素を「タグ付け」しています。また、その問題特有の解法などについては、1、2などのアイコンで示しています。

とおく。目標

次に、状況把握のために、問題文の様子を図に描けば、次のようになる。作図



未知数はxとtの２つあり、「入場口を１つだけ開けたところ、15分で行列が解消した」、「入場口を２つ開けて開園していたとき、行列が解消する時間（$=t$［分］）として、正しいのはどれか」と条件が２つあるので、公式を２式立てて連立する。なお、公式１つ目では（時間）＝15［分］、公式２つ目では（時間）＝t［分］である。
公式

このように、ニュートン算では原則的に未知数について文字を複数おき、条件の数だけニュートン算の公式を立て、連立方程式を解いていけばよい。

解説

300人並んでから毎分20人ずつ増えている状態で入場口を１つ開けたとき、行列が15分で解消したので、入場口１つに１分あたりに入場できる人数をx［人/分］とすれば、

（はじめの量）＋（増加の速さ）×（時間）－（減少の速さ）×（時間）＝0

より、公式 $300+20\times15-x\times15=0$が成り立つ。これを解けば、$x=40$［人］である。つまり、入場口１つに１分あたりに入場できる人数は40人である。

この入場口を２つ開けると２倍の速さ（１分あたり40×2＝80［人］）で処理できる。これに気を付けて、行列が解消する時間をt［分］とおけば、目標 ニュートン算の公式より、$300+20\times t-(40\times2)\times t=0$が成り立つ。これを解けば、$t=5$［分］である。つまり、300人の行列は入場口を２つ開けると５分で解消する。

●図解

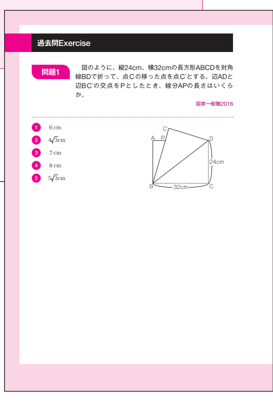
視覚的に解説したほうがわかりやすくなるものについては、図解を設けて説明しています。

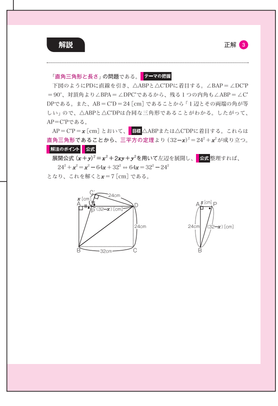
●解説

問題を解いていく様子を具体的に示しています。

過去問Exercise

節の学習の最後に、過去問を使った問題演習に取り組んでみましょう。





CONTENTS

第1章

数的推理

　数的推理は、数学的な知識(算数、数学)を用いて、計算しながら解答する分野です。数的推理だけではありませんが、数的処理で重要な能力は、論理的な処理能力です。数的推理であっても、用いる数学的知識に高度なものは一切ないので、数学的な能力より、問題に書かれている内容や選択肢を見て、問われていることを明確にし、情報を整理する国語的な能力の方が重要になります。

　数的推理は数的処理全体の基礎に相当する分野でもあるため、必要な知識は本書で一から説明しています。じっくり取り組んでみてください。

★★★

1 数的推理の基本

この節では、第１章（数的推理）の中で通して使う知識やテクニックを紹介します。本書を丹念に読み進めていけば、ここでまとめた内容が数的推理に限らず数的処理全体で使い続ける知識やテクニックであることに気づくはずです。この節の内容を常に念頭に入れながら本書を読み進めましょう。

数的推理では、次の大きな５個のポイントに留意しながら問題を解いていくとよい。そこで第１章では、さらに細かく10個のポイントに分類し、各ポイントを明示するために10種類の 記号 でタグ付けした。

1 テーマの把握

文章をよく読んで、情報を正確に読み取る。 テーマの把握

重要な条件には、アンダーラインを引いたり、囲み を付けたりしながら、文章に書かれている内容や問題の「型（かた）」から、テーマを把握する。

2 目標の設定・選択肢のチェック

❶ 目標（求めたい量や知りたい量）を明確にする。 目標

❷ 問題文を読んだあとは、選択肢も必ずチェックするようにする。 選択肢

選択肢はその問題の目標そのものである。したがって、問題文を読むときは必ず選択肢を見る習慣をつけるようにしたい。また、公務員の択一試験は選択肢が五肢択一であるから、正解が必ず１つ含まれる。見方を変えれば、選択肢は問題を解くヒントになり得る。

3 公式や解法のポイント

問題のテーマや型に応じて公式や解法のポイントを覚える。 公式 解法のポイント

4 場合分け

「Aが成り立つ」場合を考えたときは、必ず「Aが成り立たない」場合を考えるようにすることが、場合分けの基本である。 **場合分け**

5 テクニック

問題の内容を「正確に」、「具体的に」イメージができることが、問題をスムーズに解くカギになる。そこで**問題を解くテクニックとして、数的推理では次の4つのテクニックを頻繁に用い**、それぞれ、次のような4つのタグで表す。

具体化 **基準** **作図** **表**

1 具体化

① 名前を付けて具体化する

人やものをアルファベットでA、B、C、…と**順序付け**する、数字で❶、❷、❸、…と**ナンバリング**する、などしながら具体化するとよい。

② 文字をおく

未知数があれば、この**未知数に文字をおくことで具体化**する。
「**目標（求めたい量や知りたい量）**」＝$\boldsymbol{x}$**とおく**のは、定石の1つである。

※　$\boldsymbol{x}$には、例えば「$\boldsymbol{x}$［人］、$\boldsymbol{x}$［円］、$\boldsymbol{x}$［個］」などの**単位を付けるだけで具体的になる**。一方で、**文字のおきすぎに注意**する。文字のおきすぎは、計算が大変になるばかりでなく、何を求めればよいのか迷ってしまい、正解にたどり着くのに遠回りしてしまう。

③ 数値を代入して、具体的に計算する

例えば、**選択肢に正解を含む値が並んでいる場合は、1つずつ代入して確かめるのも一手**である。もちろん時間がかかる場合もあるので、**選択肢の絞り込みを行い、代入する値が少なくなるように工夫**したい。

2 基　準

代表的なテーマとして、割合(第３節)が挙げられるが、**基準を１つ定める**ことにより、**他のものを相対的に数値で表せる**(定量化)。

3 作　図

数的処理(数的推理)では様々な図が登場する。**問題のテーマに応じて、どのような図を描くべきかを覚えておく**ようにする。

4 表

条件など、問題文から読み取るべき情報量が多い場合は、**表に整理**しながら解くとよい。

定石として、表には行と列の**合計の欄を設ける**ようにする。**合計が問題を解くカギになる**こともある。

2 文章題の基本

この節では数的処理の土台である文章題の基本を学びます。特に、方程式、不等式は数的推理だけでなく、数的処理のあらゆる分野で使う道具であるので、その基本をしっかりマスターしましょう。

1 連立方程式

1 文章題の解き方

文章題では、文章を読んで状況把握をし、問題のテーマや型に応じて、図や表などにまとめたり、未知数や求めたい量に文字をおくなどして解いていく。

① 文字の種類

代表的な文字のおき方は次の通りである。

❶未知数	・x、y、z、…など ・時間(time)に関する未知数はtを用いることもある
❷名称に対応する文字	・名称に合わせて文字をおく(例：Aさんの年齢＝a［歳］)
❸整数、自然数(正の整数)	・n、m、…など[1]
❹偶数	・$2n$
❺奇数	・$2n-1$
❻連続する２整数	・nと$n+1$
❼比例定数	・k、l、m、n、…など

② 未知数の数と方程式の数

通常、未知数(文字)の数と方程式の数[2]が等しいとき、解が１組定まる。つまり、未知数の数だけ独立した方程式(これを連立方程式という)を立てれば、解が１組に定まる。

1 数（number）や自然数（natural number）の頭文字を取ってnと表すことが多い。

2 方程式の数として、方程式を変形して得られたものはカウントしない。変形して得られた方程式を「従属した方程式」といい、従属した方程式は元の方程式と実質「同じもの」である。

※　**未知数には「隠れた条件」が存在することもある**。例えば「人数は自然数（正の整数）である」や「10進法（第５節）での各位の数字は０～９の10種類の数字で表される」などのように、**問題に明記はされていないが、当たり前のことが隠れた条件になる**ことがある。

③ 年齢算

文章題には様々なテーマが存在するが、公務員試験で出題されるテーマの１つに「**年齢算**」がある。「10年後の年齢はＡがＢの２倍になる」のような、**何年か前や後の年齢に関する文章題**を「年齢算」という。年齢算では、次式を用いて立式する。

年齢算の公式

［（今日からピッタリ）$\boldsymbol{n}$ 年前の年齢］＝（現在の年齢）－ $\boldsymbol{n}$ ［歳］
［（今日からピッタリ）$\boldsymbol{n}$ 年後の年齢］＝（現在の年齢）＋ $\boldsymbol{n}$ ［歳］

2 連立方程式とその解法のポイント

① 一文字ずつ消去

連立方程式の解の求め方は**一文字ずつ未知数（文字）を消去する**ことが原則である。

② 代入法と加減法

未知数（文字）の消去には**代入法**と**加減法**の２つの方法がある。

例1　次の連立方程式の解を代入法、加減法を使ってそれぞれ求めよ。

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -x+2y=0 \end{cases}$$

❶　代入法

一方の式をxまたはyについてまとめ（これを「xまたはyについて整理する」という）、**もう一方の式に代入することで、一文字ずつ消去する方法が代入法**である。

下の式を移項して$x=2y$とし、上の式に代入すれば、左辺は$2\times2y-3y=4y-3y=y$となり、上の式は$y=1$となる。移項した下の式$x=2y$に$y=1$を代入して、$x=2$を得る。

よって、この連立方程式の解は$\underline{x=2、y=1}$である。

❷　加減法

xまたはyの係数（xやyなどの文字に掛けられた数）**をそろえて、２つの式を足したり引いたりして、一文字ずつ消去する方法が加減法**である。

下の式の両辺を２倍して上の式と並べ、２つの式を足し算する。このとき、足し方はxの項どうし、およびyの項どうしを足す。この計算により、xの項が消去され、その結果、下のように$y=1$を得る。

$$\begin{array}{rr} & 2x-3y=1 \\ +) & \underline{-2x+4y=0} \\ & y=1 \end{array}$$

あとは、$-x+2y=0$に$y=1$を代入して移項すれば、$x=2$を得る。

よって、この連立方程式の解は$\underline{x=2、y=1}$である。

例題 1-1

あるコンサートではＡ席、Ｂ席の２種類のチケットを販売しており、チケット１枚あたりの価格はＡ席が8,000円、Ｂ席が6,000円である。販売期間終了後の発表では、２種類で合計2,000枚販売し、1,360万円の売上があったという。Ａ席のチケットは何枚売れたか。

1. 500枚
2. 600枚
3. 700枚
4. 800枚
5. 900枚

正解へのプロセス

① 問題文の読み方

本問は本書の第１問目なので、問題文の読み方から解説していく。

問題文を読みながら、**問題のテーマも読み取る。** **テーマの把握**

その際、

❶ **読み間違いの起きやすいところ**（例えばいつも自分が間違えてしまうところ）に波線を引いたり、**数値条件**などの**重要情報**にアンダーラインや 囲み などを入れておく。

❷ **目標**を明確にする。 **目標**

❸ **選択肢**をチェックする。 **選択肢**

の３点を常に行う。

本問のテーマは「**連立方程式**」であり、具体的には次のように行うとよい。

「あるコンサートではＡ席、Ｂ席の２種類のチケットを販売しており、チケット１枚あたりの価格は Ａ席が8,000円 、 Ｂ席が6,000円 である。販売期間終了後の発表では、２種類で合計2,000枚販売$_{条件①}$し、1,360万円の売上があった$_{条件②}$という。**Ａ席のチケットは何枚売れたか。** **目標** 」

② 文字のおき方

本問では**求めるもの（目標）がＡ席のチケットの販売枚数**であり、さらに**Ａ席とＢ**

席の販売枚数がわからないもの(未知数)である。そこで、A席の販売枚数をx［枚］、B席の販売枚数をy［枚］とおく。

未知数はxとyの２文字であるから、独立した２式の方程式を立てなければ連立方程式の解が１組に定まらない。本問では「２種類で合計2,000枚販売条件①し、1,360万円の売上があった条件②」が２つの条件であり、これらから２式の方程式を立てる。

※　A席のチケットの販売枚数をx［枚］とおくと、条件①より、B席の販売枚数は2,000－x［枚］と表してもよい。

解説

(A席のチケットの販売枚数)＝x［枚］、(B席のチケットの販売枚数)＝y［枚］とおく。**目標**

このとき、「２種類で合計2,000枚販売した」ので、次の式で表せる[3]。

$x+y=2000$［枚］…①(条件①に対応した式)

また、「チケット１枚あたりの価格はA席が8,000円、B席が6,000円である」ことと「1,360万円の売上があった」ので、これは次の式で表せる。

$8000x+6000y=13600000$［円］…②(条件②に対応した式)

②は両辺を2,000で割ることで係数を小さくできる。

$4x+3y=6800$…③

①×3の計算により、$3x+3y=6000$…④として、③のyの係数である３に揃える。

加減法を用い、③－④で$3y$を**消去**すれば、

$$
\begin{array}{rrcl}
 & 4x+3y & = & 6800 \\
-) & 3x+3y & = & 6000 \\
\hline
 & x & = & 800
\end{array}
$$

となり、A席のチケットの販売枚数は800枚であることがわかる。**解法のポイント**

※　①より、y=1200［枚］となるが、求める必要はない。

正解　4

3　以下では、数式内の３桁ごとのカンマ [,] は煩雑であるため取り除く。

2 不定方程式

1 不定方程式

未知数の数が方程式の数より多いとき、解が定まらない(これを「不定」という)。このような方程式を「不定方程式」という。

数的処理の不定方程式の問題では、解に「自然数」や「0以上の整数」という隠れた条件が付くので、これを利用して解くことが多い。多くの場合、隠れた条件は問題文に明記されていないので注意深く問題文を読む必要がある。

2 不定方程式の解法のポイント

① 選択肢を利用する

選択肢に正解を含む値が並んでいるときは、選択肢を1つずつ代入していくとよい。

② 一文字ずつ消去

連立の不定方程式であっても、連立方程式の解法と同様に、一文字ずつ未知数を減らす。

③ 整数の性質と絞り込み

解が「自然数」や「0以上の整数」であることや倍数に着目することで、解の範囲を絞り込む。

※　整数の性質に関して、詳しくは第5節で扱う。

例2

方程式$2x+3y=17$の解が自然数であるとき、解をすべて求めよ。

yは**自然数**であり、$3y$は17より小さいので、$y=1$、2、3、4、5に絞り込める。偶数と奇数の性質に注意する[4]。偶数と奇数の足し算では、

$$\begin{cases}(\text{偶数})+(\text{偶数})=(\text{偶数})\\(\text{偶数})+(\text{奇数})=(\text{奇数})\\(\text{奇数})+(\text{奇数})=(\text{偶数})\end{cases}$$

である。xは自然数であるから、$2x$は**偶数**であり、17は**奇数**である。したがって、$2x+3y=17$は、(**偶数**)$+3y=$(**奇数**)であり、上の２つ目の式から、$3y$は**奇数**といえる。したがって、$y=1$、3、5に絞り込める。あとは具体的に計算していくと次のようになる。

・$y=1$のとき、$2x+3\times1=17$より$x=7$
・$y=3$のとき、$2x+3\times3=17$より$x=4$
・$y=5$のとき、$2x+3\times5=17$より$x=1$

よって、$2x+3y=17$の自然数の解は$(x,\ y)=$<u>(7, 1)、(4, 3)、(1, 5)</u>である。

4　偶数と奇数についても、第５節で後述する。

例題 1-2

太郎君は１個90円のリンゴを、花子さんは１個130円のリンゴをそれぞれ何個かずつ買ったところ、２人が支払った代金の合計は8,100円であった。

このとき、花子さんが買ったリンゴの個数として、あり得るのはどれか。

1. 48個
2. 50個
3. 54個
4. 58個
5. 63個

正解へのプロセス

① 文字のおき方と目標の設定

本問では、**未知数は太郎君と花子さんの買ったリンゴの個数**である。そこで、太郎君の購入したリンゴの個数をx［個］、花子さんの購入したリンゴの個数をy［個］とおく。このとき、「花子さんが買ったリンゴの個数として、あり得るものはどれか」とあるので、**求めたいのはy**である。 **目標**

② テーマの把握

条件「支払った代金の合計は8,100円であった」より、$90x+130y=8100$［円］…①と立式できる。

未知数(文字)がx、yの２つに対して、方程式が①の１つしか立たず、**未知数の数が方程式の数より多い**ので、「**不定方程式**」の**問題**であることがわかる。

テーマの把握

③ 選択肢の検討と絞り込み

本問の選択肢には、花子さんの購入したリンゴの個数y［個］について、「あり得るもの」が１つだけ含まれている。そこで、**選択肢を１つずつ代入していく**。 **選択肢**

このとき、**xとyが個数(自然数)である**ことより、**倍数に着目することで、解の範囲が絞り込め、代入する選択肢を減らすことができる。**

解説 太郎君の購入したリンゴの個数をx［個］、花子さんの購入したリンゴの個数をy［個］とおく。**目標**

題意より、$90x+130y=8100$［円］…①と立式できる。

係数を小さくするために、①の両辺を10で割ると、次式になる。

$9x+13y=810$ …②

xとyが自然数であることに着目すれば、**$9x$は9の倍数であり、$13y$は13の倍数**である。

②の各項で共通する**倍数に注目**する。**解法のポイント**

810も9の倍数であることから、移項して右辺に9の倍数を集めると、②は$13y=810-9x=9(90-x)$ …③と変形できる。すると、③の右辺は9の倍数であるから、等号で結ばれた③の左辺も（13の倍数でもあるが）9の倍数となり、yは9の倍数である。

選択肢を見ると、9の倍数でない1、2、4はあり得ない。よって、**3の$y=54$［個］か5の$y=63$［個］に絞り込める**[5]。**選択肢** **解法のポイント**

$y=54$［個］のとき、②に代入すれば$x=12$［個］となり、x、yのいずれも自然数であるが、$y=63$［個］のとき、$x=-1$［個］となり、xが自然数とならず不適である。**場合分け**

正解 3

---

5 3の$y=54$［個］か5の$y=63$［個］に絞り込めた時点で、どちらか一方の値だけを②に代入すればよい。代入する数値は、計算の簡単な方（一般的には数値の小さい方）を選ぶとよい。

3 不等式

1 不等式の文章題

① 不等式の立式

大小関係を表す条件を式で表す。

❶ 「AはBより大きい（多い）」は「A＝$\boxed{\text{Bより大きな値}}$＞B」と表せる。
したがって、「A＞B」である。　※A＝Bは含まない
❷ 「AはBより小さい（少ない）」は「A＝$\boxed{\text{Bより小さな値}}$＜B」と表せる。
したがって、「A＜B」である。　※A＝Bは含まない
❸ 「AはB以上である」は「A＝$\boxed{\text{B以上の値}}$≧B」と表せる。
したがって、「A≧B」である。　※A＝Bを含む
❹ 「AはB以下である」は「A＝$\boxed{\text{B以下の値}}$≦B」と表せる。
したがって、「A≦B」である。　※A＝Bを含む
❺ 「AはB未満である」は「A＝$\boxed{\text{B未満の値}}$＜B」と表せる。
したがって、「A＜B」である。　※A＝Bを含まない

② 間違いやすい例

間違いやすい例を挙げておく。**文章の意味を理解しながら立式**すること。

❶ 「PはQより5歳年上だ」は「P＝Q＋5［歳］」と表せる。
❷ 「PはQより5歳以上年上だ」は「P＝Q＋$\boxed{\text{5［歳以上］}}$≧Q＋5［歳］」と表せる。
したがって、「P≧Q＋5［歳］」である。
❸ 「PはQより5歳年下だ」は「P＝Q－5［歳］」と表せる。
❹ 「PはQより5歳以上年下だ」は「P＝Q－$\boxed{\text{5［歳以上］}}$≦Q－5［歳］」と表せる。
したがって、「P≦Q－5［歳］」である。

※　「PはQよりn（だけ）大きい」は、不等式ではなく等式「P＝Q＋n」で表せる。
「大きい」や「小さい」という言葉だけで「不等式である」と誤って判定しないようにすること。

2 不等式とその解法のポイント

① 不等式の計算

不等式の計算では、方程式の計算と同様に、移項して「$x \geqq \cdots$」や「$x \leqq \cdots$」の形に変形していく。負の数を掛ける(割る)と不等号の向きが逆になる。

例❶：$3 > -5$の両辺に-1を掛けると$-3 < 5$となる。

例❷：不等式$-2x \geqq 6$を解くとき、両辺に$-\dfrac{1}{2}$を掛ける(−2で割る)と、不等号の向きが変わり、$x \leqq -3$となる。

② 絞り込み

不等式によって範囲を絞り込める。

例❸：$12 < x \leqq 16$を満たす自然数xは$x = 13$、14、15、16である。

3 過不足算（過不足の不等式）

不等式の定番問題の一つであり、「ＡをＢに配分すると、Ａに過剰分や不足分が発生する」という条件から、不等式を立式する問題を「過不足算(過不足の不等式)」という。次の例題で過不足算の問題の型を見ていく。

例題 1-3

ある本数の鉛筆を子どもたちに配ることにした。それぞれの子どもに３本ずつ配ると32本余り、４本ずつ配ると15本より多く余った。そこで、６本ずつ配ると鉛筆が15本以上不足した。このとき、子どもの人数として正しいのはどれか。

1. 13人
2. 14人
3. 15人
4. 16人
5. 17人

正解へのプロセス

① テーマの把握

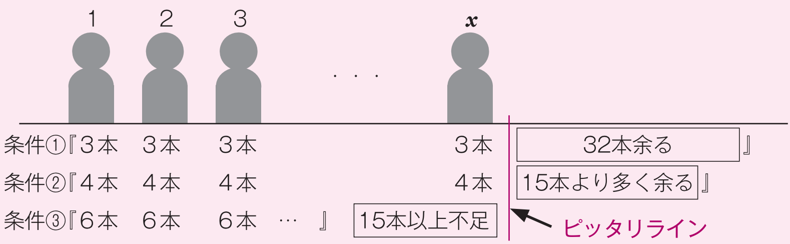
本問では求めるものが子どもの人数なので、**子どもの人数をx［人］とする。** **目標**

「それぞれの子どもに３本ずつ配ると32本余り条件①、４本ずつ配ると15本より多く余った条件②。そこで、６本ずつ配ると鉛筆が15本以上不足した条件③」という条件から、**「過不足算」の問題**であることがわかる。 **テーマの把握**

② 過不足算の図

上の条件①～③を図示すると下図のようになる。 **作図**

このとき、鉛筆の本数の合計に当たる部分を二重かぎ括弧(『　　』)で挟んで表しており、**赤色の線は過剰も不足もなく「ピッタリ」配られたことを表す**(以下「ピッタリライン」と呼ぶ)。



③ 過不足算の立式

まずは条件①を立式する。ピッタリラインまで$3 \times x$［本］配ったことになるので、余りの32本を合わせれば、鉛筆の本数は$3x+32$［本］となる。

次に条件②を立式する。ピッタリラインまで$4 \times x$［本］配ったことになる。また、**「15本より多く余った」**は**「＋ $\boxed{\text{15本より多い本数}}$ 」**と表現する。$\boxed{\text{囲み}}$ の部分に入る数字は16、17、…であるので **具体化**、**「$\boxed{\text{15本より多い本数}}$ ＞15本」**と表せる。したがって、**「(鉛筆の本数)$=4x+$ $\boxed{\text{15本より多い本数}}$ $>4x+15$」**と表せる。

最後に条件③を立式する。仮にピッタリラインまで配ったとすれば、$6 \times x$［本］配ったことになるが、鉛筆の本数の合計は、ピッタリラインより左側にある二重かぎ括弧の右側(』)まで戻すように計算しなければいけない。そこで、**「15本以上不足した」**を**「− $\boxed{\text{15本以上の本数}}$ 」**と表現する。$\boxed{\text{囲み}}$ の部分に入る数字を**書き出せ**ば、15、16、17、…であるので **具体化** 、**負の数を掛けると不等号の向きが入れ替わることに注意**すれば、**「− $\boxed{\text{15本以上の本数}}$ ≦ −15本」**と表せる。したがって、**「(鉛筆の本数)$=6x-$ $\boxed{\text{15本以上の本数}}$ $\leqq 6x-15$」**と表せる。

解説

子どもの人数をx［人］、配った鉛筆の本数の合計をy［本］とする。 **目標**

「それぞれの子どもに３本ずつ配ると32本余り」とあるので、この条件は$y=3x+32$［本］…①と表せる。

「４本ずつ配ると15本より多く余った」とあるので、この条件は$y=4x+$ $\boxed{\text{15本より多い本数}}$ $>4x+15$、つまり、$y>4x+15$ …②と表せる。

「６本ずつ配ると鉛筆が15本以上不足した」とあるので、この条件は$y=6x-$ $\boxed{\text{15本以上の本数}}$ $\leqq 6x-15$、つまり、$y \leqq 6x-15$ …③と表せる。

①を②と③に代入し、**yを消去**すれば、$3x+32>4x+15$ …④および$3x+32 \leqq 6x-15$ …⑤となる。④で$32-15>4x-3x$のように移項して整理すれば、$x<17$となり、⑤で$32+15 \leqq 6x-3x$ のように移項して整理すれば、$x \geqq \frac{47}{3}$となる。まとめると、$\frac{47}{3} \leqq x < 17$となる。$\frac{47}{3}=15.666\cdots$より、$15.666\cdots \leqq x < 17$と x の範囲を絞り込め、これを満たす人数（自然数）x は16しかない。 **解法のポイント**

正解 ④

過去問Exercise

問題1

ある家では、ペットボトルの天然水を毎月８本消費する。従来はすべてスーパーで購入していたが、通信販売で６本入りケースを購入すると、１本当たりの価格はスーパーの半額であり、別途、１回の配送につき、ケース数にかかわらず一律の配送料金がかかることが分かった。また、毎月、通信販売で１ケースを、スーパーで残り２本を購入すると月ごとの経費は従来より300円安くなり、３か月間に２回、通信販売で２ケースずつ購入すると月ごとの平均経費は従来より680円安くなることが分かった。このとき、スーパーでの１本当たりの価格はいくらか。

国家専門職2010

1. 160円
2. 180円
3. 200円
4. 220円
5. 240円

解説

正解 5

目標は「スーパーでのペットボトルの天然水１本当たりの価格」である。 **目標**

また、「毎月、通信販売で１ケースを、スーパーで残り２本を購入すると月ごとの経費は従来より300円安くなり条件①」、「３か月間に２回、通信販売で２ケースずつ購入すると月ごとの平均経費は従来より680円安くなる条件②」のように、**価格に関する２つの条件がある。条件が２つなので、未知数に対応する文字は最低２つ設定できる**。そこで、目標である、「スーパーでのペットボトルの天然水１本当たりの価格」を$\boldsymbol{x}$［円/本］とおく。このとき、「通信販売で６本入りケースを購入すると、１本当たりの価格はスーパーの半額」になるので、通信販売における天然水１本当たりの価格は$0.5\boldsymbol{x}$［円/本］である。また、通信販売では１回の配送につき、ケース数にかかわらず一律の配送料金がかかるので、２つ目の未知数に対応する文字として、この配送料金を$\boldsymbol{y}$［円/回］とおく。**この２文字（$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$）だけで、２つの条件を表すことができる**ので、本問は**「連立方程式」の問題**であることがわかる。

テーマの把握

条件①「毎月、通信販売で１ケース（６本）を、スーパーで残り２本を購入すると月ごとの経費は従来（８本すべてをスーパーで購入）より300円安くなり」を式にすれば、

$$(0.5\boldsymbol{x}\times6+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{x}\times2=\boldsymbol{x}\times8-300$$

となり、整理すれば、$\boldsymbol{y}=3\boldsymbol{x}-300$ …①が成り立つ。

条件②「３か月間に２回、通信販売で２ケースずつ購入すると月ごとの平均経費は従来より680円安くなる」とあるので、３か月の合算で式を立てれば、条件②は、

$$(0.5\boldsymbol{x}\times6\times2+\boldsymbol{y})\times2=\boldsymbol{x}\times8\times3-680\times3$$

となり、整理すれば、$\boldsymbol{y}=6\boldsymbol{x}-1020$ …②が成り立つ。

①、②を連立して解くと、$\boldsymbol{y}$を消去して、$3\boldsymbol{x}-300=6\boldsymbol{x}-1020$となり、移項して整理すれば、$\boldsymbol{x}=240$［円/本］となる。

※　$\boldsymbol{y}=420$［円］となるが、求める必要はない。

問題2

両親と３姉妹の５人家族がいる。両親の年齢の和は、現在は３姉妹の年齢の和の３倍であるが、６年後には３姉妹の和の２倍になる。また、４年前には父親と三女の年齢の和が、母親・長女及び次女の年齢の和と等しかったとすると、現在の母親・長女及び次女の年齢の和はどれか。

特別区Ⅰ類2006

1. 42
2. 44
3. 46
4. 48
5. 50

解説

正解 5

何年か前や後の年齢に関する文章題であるから、「**年齢算**」の問題である。

テーマの把握

条件ア：「両親の年齢の和は、現在は３姉妹の年齢の和の３倍」
条件イ：「両親の年齢の和は、６年後には３姉妹の和の２倍になる」
条件ウ：「４年前には父親と三女の年齢の和が、母親・長女及び次女の年齢の和に等しかった」

５人家族各々の年齢を未知数とすると、未知数に対応する文字が５つも必要になってしまう。

そこで、冒頭の２つの条件ア、イより、現在の両親の年齢の和、現在の３姉妹の年齢の和をそれぞれx［歳］、y［歳］とおき、おく文字をなるべく少なくする。

条件アより、$x=3y$ …①と表せる。

条件イより、$x+6\times2=(y+6\times3)\times2$…②と表せる。

未知数がx、yの２つに対し、独立した方程式が２式あるので、解が１組求められる。 **解法のポイント**

①を②に代入してxを消去すれば、$3y+12=2y+36$より、移項すれば$y=24$となり、$x=3\times24=72$を得る。ゆえに、$x=$「現在の両親の年齢の和」$=72$［歳］、$y=$「現在の３姉妹の年齢の和」$=24$［歳］である。これにより、現在の家族５人の年齢の合計は、$72+24=96$［歳］になる。

ここで、**現在の母親・長女及び次女の年齢の和をz［歳］とする。** **目標**

現在の父親と三女の年齢の和は$96-z$［歳］と表せる。したがって、「４年前の父親と三女の年齢の和」$=(96-z)-4\times2$［歳］、「４年前の母親・長女及び次女の年齢の和」$=z-4\times3$［歳］と表せる。

ここで、条件ウより、$(96-z)-4\times2=z-4\times3$が成り立ち、これを解けば、$z=50$［歳］である。

問題3

80円、30円、10円の３種類の切手を、合わせて30枚、金額の合計でちょうど1,640円になるように買いたい。このような買い方に合致する切手の枚数の組合せは何通りか。

国家一般職2012

1. １通り
2. ２通り
3. ３通り
4. ４通り
5. ５通り

解説

正解 2

買う枚数をそれぞれ、80円切手をx［枚］、30円切手をy［枚］とおく。**目標**「3種類の切手を合わせて30枚」買うので、10円切手を買う枚数は$30-x-y$［枚］である。

金額の合計に関する式を作ると、次のようになる。

$80x+30y+10\times(30-x-y)=1640$［円］

整理すれば、$7x+2y=134$ …①となる。**未知数がx、yの２つに対し、方程式が１つしかないので、「不定方程式」の問題**である。**テーマの把握**

①を倍数がわかりやすいように変形すると、次のようになる。

$7x=2(67-y)$ …②

②より、$67-y$は**０より大きく67より小さい７の倍数**であり、具体的に書き出せば、$67-y=7$、14、21、28、35、42、49、56、63が考えられる。

解法のポイント

「切手は合わせて30枚」であるから、30円切手の枚数であるy［枚］は少なくとも30より小さい数である。そこで、具体的に書き出した上の数のうち、yが30を超えるものを除けば、$67-y$として考えられるのは、42、49、56、63の４つに**絞り込める**。「切手は合わせて30枚」であるから、$x+y$も30より小さい数である。したがって、**この４つの数をそれぞれ②の$(67-y)$に代入して、$x+y$が30より小さい数になる場合を検討**してみる。**具体化** **場合分け**

(1) $67-y=42$のとき、$y=25$で、②より$7x=2\times42$となり、$x=12$である。
　このとき、$x+y=37>30$となり、不適である。

(2) $67-y=49$のとき、$y=18$で、②より$7x=2\times49$となり、$x=14$である。
　このとき、$x+y=32>30$となり、不適である。

(3) $67-y=56$のとき、$y=11$で、②より$7x=2\times56$となり、$x=16$である。
　このとき、$x+y=27<30$となり、10円切手の枚数は$30-x-y=3$［枚］で条件を満たす。

(4) $67-y=63$のとき、$y=4$で、②より$7x=2\times63$となり、$x=18$である。
　このとき、$x+y=22<30$となり、10円切手の枚数は$30-x-y=8$［枚］で条件を満たす。

よって、買い方は(3)、(4)の２通りである。

問題4

　ある催し物の出席者用に６人掛けの長椅子と４人掛けの長椅子を合わせて21脚用意した。６人掛けの長椅子だけを使って６人ずつ着席させると、36人以上の出席者が着席できなかった。６人掛けの長椅子に５人ずつ着席させ、４人掛けの長椅子に４人ずつ着席させると、12人以上の出席者が着席できなかった。また、６人掛けの長椅子に６人ずつ着席させ、４人掛けの長椅子に４人ずつ着席させると、出席者全員が着席でき、席の余りもなかった。このとき、出席者の人数として、正しいのはどれか。

東京都Ⅰ類2017

1. 106人
2. 108人
3. 110人
4. 112人
5. 114人

解説

正解 2

余り（過剰分）や不足についての条件が与えられるので、本問は「過不足算」の問題である。**テーマの把握**

6人掛けの長椅子と4人掛けの長椅子の数をそれぞれx［脚］、y［脚］とし、出席者の人数をz［人］とする。**目標**

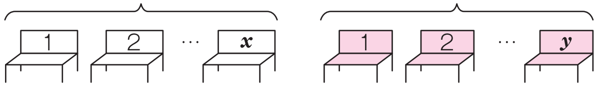
最初の条件「6人掛けの長椅子と4人掛けの長椅子を合わせて21脚用意した条件①」より、$x+y=21$ …①が成り立つ。

条件「6人掛けの長椅子だけを使って6人ずつ着席させると、36人以上の出席者が着席できなかった条件②」より、$z=6x+\boxed{36人以上}\geqq 6x+36$、つまり、$z\geqq 6x+36$ …②が成り立つ。

次に、条件「6人掛けの長椅子に5人ずつ着席させ、4人掛けの長椅子に4人ずつ着席させると、12人以上の出席者が着席できなかった条件③」より、$z=5x+4y+\boxed{12人以上}\geqq 5x+4y+12$、つまり、$z\geqq 5x+4y+12$ …③が成り立つ。

また、最後の条件「6人掛けの長椅子に6人ずつ着席させ、4人掛けの長椅子に4人ずつ着席させると、出席者全員が着席でき、席の余りもなかった条件④」より、出席者の人数は$6x+4y$［人］であることがわかる。つまり、$z=6x+4y$ …④とする。以上の条件を図示すれば、次のようになる。**作図**

6人掛け長椅子　　　　4人掛け長椅子



条件②『6人	6人	…	6人	0人	0人	…	0人	$\boxed{36人以上}$』
条件③『5人	5人	…	5人	4人	4人	…	4人	$\boxed{12人以上}$』
条件④『6人	6人	…	6人	4人	4人	…	4人』	

ピッタリライン

④を②と③に代入しzを消去すれば、$6x+4y\geqq 6x+36$および$6x+4y\geqq 5x+4y+12$である。これを整理すると、それぞれ、$y\geqq 9$、$x\geqq 12$を得る。この不等式の中で条件①を満たすのは、等号の成立する$x=12$［脚］、$y=9$［脚］のときしかない。

よって、出席者の人数は④より$z=6\times 12+4\times 9=108$［人］である。

★★★

3 比、割合、平均、濃度

この節でも引き続き、数的処理の土台を学習します。とりわけ、割合の応用である「損益算」、「濃度と混合」の問題は、数的処理の定番問題なので、しっかりマスターしましょう。

1 比

1 比とその解法のポイント

いくつかの０でない数や数量の関係を表したものを「比」といい、$a:b$のように表す。比の等式を「**比例式**」という。

比は、式全体に同じ数を掛けたり、同じ数を割ったりすることで、簡単な比に直すことができる。

例1

3：4は全体を３倍すれば9：12になり、3：4は全体を４倍すれば12：16になる。したがって、次式が成り立つ。

$$3:4=9:12=12:16$$

逆に、12：16は全体を４で割れば（$\frac{1}{4}$倍すれば）3：4になり、9：12は式全体を３で割れば（$\frac{1}{3}$倍すれば）3：4になる。したがって、次式が成り立つ。

$$12:16=9:12=3:4$$

当然だが、２つの式は同じである。

① 比の具体化

比が与えられたときは、各数量を比例定数kの一文字だけを使って表すことができる。

例えば、Ｘ社への出資額（単位は[万円]）として、Ａ社とＢ社とＣ社の出資比率がそれぞれ5：3：2であることがわかっていたとしても、（Ａ社の出資額）＝5[万円]、（Ｂ社の出資額）＝3[万円]、（Ｃ社の出資額）＝2[万円]であるのか、（Ａ社の出資額）＝5000[万円]、（Ｂ社の出資額）＝3000[万円]、（Ｃ社の出資額）＝2000

[万円]であるのかはわからない。そこで、(A社の出資額)＝5$\boldsymbol{k}$[万円]、(B社の出資額)＝3$\boldsymbol{k}$[万円]、(C社の出資額)＝2$\boldsymbol{k}$[万円]とおくと、「A社とB社とC社の出資比率がそれぞれ5：3：2」を具体的な値として表現できる。

なお、(A社の出資額)＝$\boldsymbol{x}$[万円]、(B社の出資額)＝$\boldsymbol{y}$[万円]、(C社の出資額)＝$\boldsymbol{z}$[万円]として、$\boldsymbol{x}$：$\boldsymbol{y}$：$\boldsymbol{z}$＝5：3：2とすることもできるが、この場合、文字は$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{z}$の３つが必要になる。一方、上記の$\boldsymbol{k}$倍する方法では文字を$\boldsymbol{k}$の１つで済ませることができ、**文字を少なくすることができる**。

② ２数の比例式の変形

例えば、20：15＝4：3であるが、比の外側の２数(20と３)の積は20×3＝60であり、内側の２数(15と４)の積は15×4＝60となり、２つの積の値が一致する。このように、**２数の比例式では、「(外項の積)＝(内項の積)」が成り立つ**。つまり、$\boldsymbol{a}$：$\boldsymbol{b}$＝$\boldsymbol{c}$：$\boldsymbol{d}$では$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$が成り立つ。このようにして、比例式を方程式に変形することができる。

例2

$\boldsymbol{x}$：4＝5：9を満たす$\boldsymbol{x}$は**(外項の積)＝(内項の積)**より、$\boldsymbol{x}\times9=4\times5$と変形することで、$\boldsymbol{x}$の１次方程式に変形できる。これを解けば、$\boldsymbol{x}=\dfrac{20}{9}$となる。

2 連　比

３つ以上の数の比を、１つの比例式にまとめて表したものを「連比（れんぴ）」という。

例3

A：B＝2：3、B：C＝2：3のとき、A：B：Cをまとめて、簡単な比に直せばどうなるだろうか。

登場する文字どうしを比較できるように、両方の比の式に登場する文字の数値を揃える。そこで、次のように、**両方の比の式に登場する文字と、これに対応する数値が上下に揃うように並べる**。

$$
\begin{array}{lllll}
A : B & & = 2 : & \boxed{3} & \\
 & B : C = & & \boxed{2} & : 3
\end{array}
$$

Bが両方の比の式に登場する。Bに対応する数値が上下それぞれで、３と２であ

るから、**最小公倍数に統一してA、B、Cを比較できるようにする**。そのために、上の式の右辺を２倍、下の式の右辺を３倍すれば、

$$
\begin{array}{lllll}
A : B & & = 4 : & \boxed{6} & \\
& B : C = & & \boxed{6} & : 9
\end{array}
$$

のように、**Bを「６」に統一**できる。まとめると、A：B：C＝<u>4：6：9</u>となる。

※　最小公倍数に関して、詳しくは第５節で扱う。

3　逆　比

逆数の比を「**逆比**」という。

①　２数の逆比

$a:b$の逆比は$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$である。$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$にabを掛ければ、$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}=b:a$となり、**２数の逆比は比の並びが逆になる**。

②　３数の逆比

$a:b:c$の逆比は$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$である。$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$に$abc$を掛ければ、$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}=bc:ca:ab$となり、**３数の逆比の場合は比の並びが逆にはならない**。

4　分数式と比例式

例えば、$\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$のとき、$a=3k$、$b=2k$　$(k\neq0)$[1]と表せる。

したがって、

$a:b=3k:2k=3:2$

である。

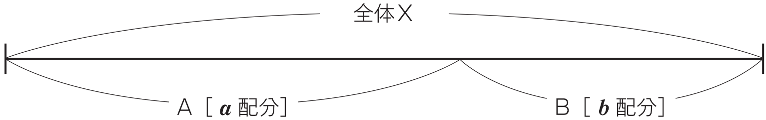
このように、**分数式は比例式に直すことができる**。

1　0で割ることはできないため、分数の分母は0でない。したがって、$\frac{b}{a}$の分母aは0でない。これより$a=3k$のkも0でない。

5 比例配分

全体XをAとBにそれぞれa：bに比例配分するときは、下図のように**線分図を描く**とわかり易い。

比例配分には２つの解法がある。次の例で具体的に確認していきたい。



例4

240本の鉛筆をAとBにそれぞれ2：3に比例配分する。このとき、A、Bには何本ずつ配分すればよいだろうか。

線分図を描くと次のようになる。

［解法１］

次のように解く。**A＝2k［本］、B＝3k［本］と具体化**して、240＝2k＋3kより、5k＝240からk＝48を得る。よって、A＝2×48＝<u>96［本］</u>、B＝3×48＝<u>144［本］</u>ずつ配分すればよい。

［解法２］

次のように解く。**240本を（2＋3＝）5等分する**と、1等分あたり240÷5＝48［本］である。これを**Aには２個分、Bには３個分配分**して、A＝2×48＝<u>96［本］</u>、B＝3×48＝<u>144［本］</u>である。

例題 1-4

兄と弟の貯金額の比は5：3であった。ところが、兄はそこから7,500円使い、弟は逆に1,000円貯金したので、兄と弟の貯金額の比は3：4になった。兄のはじめの貯金額として、正しいのはどれか。

1. 10,000円
2. 12,500円
3. 15,000円
4. 17,500円
5. 20,000円

正解へのプロセス

貯金額の比は、はじめは兄：弟＝5：3であり、おわりは兄：弟＝3：4になっている。条件は2つあり、兄のはじめの貯金額が問われているので、はじめの兄の貯金額をx［円］、はじめの弟の貯金額をy［円］とおいて、連立方程式で解くこともできる。**目標** **しかし、本問は「比」の問題であるから、兄と弟のはじめの貯金額を、それぞれ5*k*［円］、3*k*［円］とおく**とよい。**解法のポイント** この方が、文字が少なくなり計算も簡単になる。

解説

兄と弟のはじめの貯金額を、それぞれ**5*k*［円］、3*k*［円］とおく**。

目標 **解法のポイント**

兄はそこから7,500円使い、弟は逆に1,000円貯金して、兄と弟の貯金額の比が3：4になったので、次の式が成り立つ。

$(5k-7500):(3k+1000)=3:4$

（外項の積）＝（内項の積）より、$4\times(5k-7500)=3\times(3k+1000)$となる。

解法のポイント

これを解けば、$k=3000$を得る。よって、兄のはじめの貯金額は$5\times3000=15000$［円］である。

正解 3

2 割　合

1 割合の解法のポイント

基準となる量に対する、ある量の比率を「**割合**」という。小数、分数、比、百分率、歩合などを用いて表す。

① 基　準

割合を考える上で最も大事なのは、「**基準は何か？**」である。

基準に具体的な値が与えられている場合を除けば、**(基準)＝1として割合を分数(や小数)で表現することが多いが、状況に応じて(基準)＝100**（**100%)で表す**こともある。

分数・小数	1	$\frac{1}{10}=0.1$	$\frac{1}{100}=0.01$	$\frac{1}{1000}=0.001$
百分率[%]	100%	10%	1%	0.1%
歩合	10割	1割	1分(ぶ)	1厘(りん)

② 線分図

割合を図示するときは、**線分図を描く**とよい(下図)。

2 割合の様々な表現

① 割合の基本表現

「Aに対するBの割合[%]」=「BのAに対する割合[%]」$=\dfrac{B}{A}\times 100$

※ 「Aに対する」とある場合、Aが「基準=分母」である。

② 合格率、競争率

$(\text{合格率}[\%])=\dfrac{(\text{合格者数})}{(\text{受験者数})}\times 100$、$(\text{競争率}[\text{倍}])=\dfrac{(\text{受験者数})}{(\text{合格者数})}$で求められる。

3 損益算(売買算)

割合にも様々な文章題がある。とりわけ、「**損益算(売買算)**」と呼ばれる、売買(利益や損失)に関する文章題は公務員試験をはじめ、様々な試験に登場する重要なテーマである。次の表にある用語を理解しておきたい。

損益算(売買算)に関する用語

価格	①原価	仕入れの価格
	②定価	はじめに付けた価格
	③販売価格(売価)	定価や割引価格など、売るときの価格の総称
売上		(販売価格)×(販売個数)の総和
総利益(利益合計)		(総利益)=(売上)ー(原価合計)=(利益小計)の総和

4 増　減

次の例で具体的に見ていくが、「～％増し（～％増）」、「～割引き（～割減）」と増減の付いていない「～％」、「～割」を読み違えないようにする。

例5

次の$\boxed{\quad}$にあてはまる数字はいくらか。

❶ 500円の３割増しは$\boxed{ア}$円である。

❷ 7,200円の25％引きは$\boxed{イ}$円である。

❸ $\boxed{ウ}$円の５割増しは6,000円である。

❶ 500円が基準である。

500円の３割は、500×３割＝500×0.3＝150［円］に相当する。したがって、$\boxed{ア}$には500＋150＝<u>650［円］</u>が入る。なお、これを１つの式にすると、500×（1＋0.3）＝500×1.3＝<u>650［円］</u>である。

❷ 7,200円が基準である。

7,200円の25％は、7,200円の$\frac{1}{4}$であり、４で割った1,800円が相当する。したがって、$\boxed{イ}$には、7,200円から1,800円を引いた<u>5,400円</u>が入る。あるいは、7,200円の25％引きは、7,200円の75％になるから、これを１つの式にすると、$7200\times(1-0.25)=7200\times0.75=7200\times\frac{3}{4}=$<u>5400［円］</u>である。

❸ $\boxed{ウ}$円が基準である。

$\boxed{ウ}=\boldsymbol{x}$［円］とすれば、$\boldsymbol{x}$円の５割増しは6,000円であるから、$\boldsymbol{x}\times(1+0.5)=6000$［円］である。これを解けば、$\boldsymbol{x}=6000\div1.5=6000\div\frac{3}{2}=6000\times\frac{2}{3}$＝<u>4000［円］</u>である。

例題 1-5

7,200円で品物をいくつか仕入れ、1個あたり600円で全部売って、仕入れ総額の25％の利益を見込んだ。しかし、実際には何個かを600円で売り、残りを5％値引きして売ったため、全体で仕入れ総額の20％の利益しか得られなかった。このとき、600円で売った品物の個数として、正しいのはどれか。

1. 1個
2. 2個
3. 3個
4. 4個
5. 5個

正解へのプロセス

❶ 損益算では、**利益は「プラス（＋）」で、損失は「マイナス（－）」で数値化する。**

❷ 損益算は割合に関する問題の一種である。したがって、「5％値引き」などの増減に関する言葉が出てきたときは、「何に対する割合なのか？」を、つまり、**割合の基準が何か**を考えるようにしたい。 **基準**

「値引き」は値段から引くことであるから、本問でははじめに付けた値段（定価）である600円から5％引くと読み取る。

❸ **損益算では、登場する条件や数値が多いので、必要に応じて線分図や表などを作成して整理をするとよい。** **表**

解説

600円で売れた品物の個数をx［個］とする。 **目標**

25％の利益を見込んで1個あたり定価600円で売ったので、（原価）×（1＋0.25）＝（定価）より、1個あたりの原価は、**（原価）＝600÷1.25＝600÷$\frac{5}{4}$＝600×$\frac{4}{5}$＝480［円］**である。また、仕入れ総額が7,200円であるので、仕入れた個数は7200÷480＝15［個］である。

定価600円の5％引きの割引価格は600－600×5％＝600－600×0.05＝570［円］であり、**仕入れ総額の20％の利益とは7200×20％＝7200×0.20＝1440［円］**である。

以上より、1個あたりの利益は、定価の600円のときは600－480＝120［円］、割引価格の570円のときは570－480＝90［円］だけ生じる。これらを表に整理すると、下のようになる。 表

		価格	個数	利益	利益小計
原価		480円/個	15個	0円/個	
売価	定価	600円/個	x[個]	120円/個	120×x[円]
	割引価格	570円/個	15－x[個]	90円/個	90×(15－x)[円]

条件より、**総利益について立式**すれば、$120\times x+90\times(15-x)=1440$［円］となり、これを解けば$x=3$［個］である。

正解 3

3 平　均

1 平均値

数量の凹凸を「平らに均(なら)し」、不揃いでないようにすることを「平均する(平均を取る)」といい、その値を平均値という。

① 平均値と合計

平均値は数量の合計(総和)を均等に分けることで定められる。

平均値と合計

【平均の定義】

$$(\text{平均値})=\frac{(\text{数量の合計})}{(\text{個数}(\text{人数}))}$$

これを変形すれば、

【平均と合計の公式】

$$(\text{数量の合計})=(\text{平均値})\times(\text{個数}(\text{人数}))$$

となる。

② 仮平均

平均値を計算するとき、数量の合計が大きくなる場合がある。このような**大きな数量の合計を求めることを回避するために、仮の平均値(仮平均)を設定して、真の平均値を計算する方法を「仮平均法」**という。

仮平均法を用いるとき、真の平均値は次のように計算できる。

仮平均の公式

$$(\text{真の平均値})=(\text{仮平均})+\frac{\{(\text{各数量})-(\text{仮平均})\}\text{の合計}}{\text{個数}}$$

$$=(\text{仮平均})+[\{(\text{各数量})-(\text{仮平均})\}\text{の平均}]$$

簡単に書き直せば、

$$(\text{真の平均値})=(\text{仮平均})+(\text{仮平均との差の平均})$$

※　ただし、ここでの(差の平均)の「差」は符号(＋、－)を含む量である。次の例の[解法２]を参照してもらいたい。

例6

A君がこれまでに受けた８回のテストの結果は、以下の表の通りであった。この後２回テストを受けて、全10回の平均点を80点としたい。このとき、残り２回で取らなくてはいけない平均得点はいくらか。

回	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
点数	75	86	73	67	92	78	76	85	?	?

[解法１]　「平均の定義」や「平均と合計の公式」を用いて計算する

10回の平均点を80点にしたいので、10回の合計点が何点になればよいかを考える。

(合計点)＝(平均点)×(回数)で求められるので、全10回で、80×10＝800［点］取ればよいことがわかる。８回目までの合計点が75＋86＋73＋67＋92＋78＋76＋85＝632［点］であるので、残り２回で800－632＝168［点］取ればよい。したがって、残り２回の平均点は、$(平均値)=\dfrac{(合計)}{(回数)}$より、$(平均点)=\dfrac{168}{2}=\underline{84}$ $\underline{[点]}$となる。

[解法２]　仮平均法を用いて計算する

仮平均を80点と設定すると、(仮平均との差)＝(各数量)－(仮平均)は次表のようになる。

回	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
点数	75	86	73	67	92	78	76	85	?	?
仮平均との差	－5	＋6	－7	－13	＋12	－2	－4	＋5		

したがって、１回目から８回目までの{(仮平均との差)の合計}は、－5＋6－7－13＋12－2－4＋5＝－8［点］となる。なお、(仮平均との差)や{(仮平均との差)の合計}にはマイナスの場合がありうることに注意してもらいたい。

(真の平均値)＝(仮平均)＋(仮平均との差の平均)であり、ここでは、(真の平均値)＝(仮平均)＝80［点］であるので、(仮平均との差の平均)＝0［点］になればよい。

$$(\text{仮平均との差の平均})=\frac{\{(\text{各数量})-(\text{仮平均})\}\text{の合計}}{\text{回数}}=$$

$$\frac{-8[\text{点}]+(9\text{回目の点差})+(10\text{回目の点差})}{10}=0[\text{点}]$$ より、（9回目の点差）＋（10回目の点差）＝8［点］であればよく、9回目と10回目の平均で $\frac{8}{2}=4$［点］多く取ればよいことになる。よって、残り2回で平均80＋4＝84［点］取ればよい。

③ 平均値の異なる集団の全体の平均値

平均値の異なる2つの集団があり、2つの集団を合わせた「全体の平均値」を求めるときは、各集団の合計を求めることで、全体の合計や全体の平均値が求められる。

例7

あるテストについて、下表のように2クラスのデータが与えられたとき、全体の平均点はいくらか。

あるテストの２クラスのデータ

	Aクラス	Bクラス	全体
平均点	75点	80点	?
人数	20人	30人	50人
合計	1500点	2400点	3900点

このとき、全体の平均点＝$\frac{75\times20+80\times30}{20+30}=\frac{3900}{50}=78$［点］となる。

④ 平均値とバランス

何人かで食事に行って割り勘するときの金額は平均額である。割り勘をする理由は「**バランスを取る**」ことに他ならないが、このことから推測できるように、

（平均値）＝（バランスする位置）

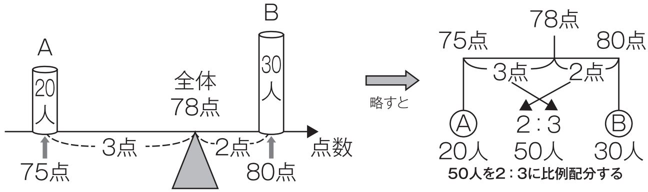
という見方ができ、これが次に述べる天秤法の原理である。

2 天秤法と天秤図

前述のとおり、「**平均を取る**」とは「**バランスを取る**」ことである。バランスをイメージする方法として、シーソーや天秤を描くとわかりやすい。**全体の平均値をバランスする位置として図示したものが**「**天秤図**」である。

例7 に出てきた表をグラフにすると次の図である。

図では、人数が「シーソー・天秤の腕に乗るおもりの重さ」に、点差が「腕の長さ」に、全体の平均点が「平衡点（バランスする位置＝重心）」に対応している。この考え方を「**天秤法**」という。



※　「ぶら下がりのおもり」で描いた**右図は左図のシーソーの図の略図**である。

この図からもわかるように、A、Bの各クラス平均点と全体の平均点までの点差（３点および２点）が、クラスの人数（20人および30人）の**逆比**になっている。つまり、３点：２点＝30人：20人が成り立っている。

これは、一般の場合でも成り立ち、天秤法では各集団の平均値と集団全体の平均値の差を「腕の長さ」とすれば、

　　（Aの腕の長さ）：（Bの腕の長さ）＝（Bの要素の数）：（Aの要素の数）

とまとめられる。

4 濃度と混合

1 食塩水

食塩水とは食塩＋水であり[2]、食塩水の濃度や食塩の重さについての問題が公務員試験では出題される。

① 食塩水の濃度

食塩水の濃度とは、**食塩水全体に占める食塩の割合[%]**である（次の図をイメージ）。よって、**濃度の基準は食塩水全体**である。

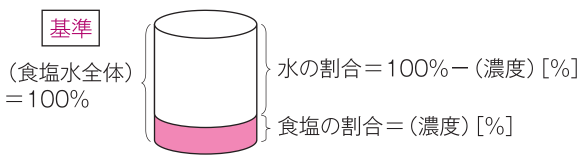
食塩水の濃度、食塩の重さ

【食塩水の濃度の定義】

$$(\text{食塩水の濃度}\,[\%]) = \frac{(\text{食塩の重さ}[\mathrm{g}])}{(\text{食塩水の重さ}[\mathrm{g}])} \times 100\,[\%]$$

【食塩の重さの公式】

$$(\text{食塩の重さ}\,[\mathrm{g}]) = (\text{食塩水の重さ}\,[\mathrm{g}]) \times \frac{(\text{食塩水の濃度}[\%])}{100[\%]}$$



② 条件の読み替え

以下のように問題の条件を読み替えると解きやすくなる。

❶ 「食塩を加える」＝「濃度100%の食塩水を混ぜる」

❷ 「水を加える」＝「濃度０%の食塩水を混ぜる」

❸ 「蒸発させる」＝「水のみを抜く」＝「濃度０%の食塩水を引く」

2 砂糖水も，砂糖水＝砂糖＋水である。

2 食塩水の混合と天秤法

２つの食塩水を混合すると、**混合後の濃度は均一化される**。したがって、

（混合後の濃度）＝（平均値）＝（バランスする位置）

として天秤図で図示できる。これを表したものが次の図である。

食塩水の混合と天秤法

【天秤法】

２つの食塩水Ａ、Ｂを混ぜるとき、**混合前の食塩水の重さの比と濃度変化の比は逆比の関係**になる。つまり、

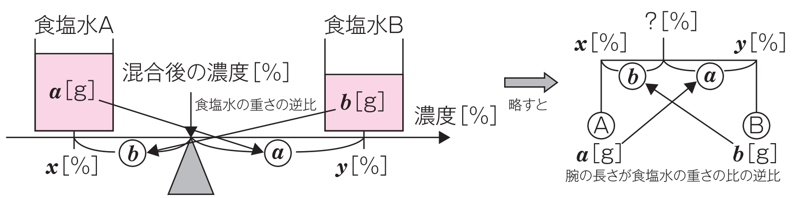
（Ａの混合前後の濃度変化）：（Ｂの混合前後の濃度変化）

＝（Ｂの重さ）：（Ａの重さ）

が成り立つ[3]。

【天秤図】

天秤法をもとに図を描いたものが天秤図である。



3 この式は、(混合後の濃度[%]) ＝ $\dfrac{(\text{Aの重さ})\times(\text{Aの濃度[\%]})+(\text{Bの重さ})\times(\text{Bの濃度[\%]})}{(\text{Aの重さ})+(\text{Bの重さ})}$ を変形することで得られる。

例8

８％の食塩水200gと14％の食塩水50gを混ぜ合わせると何％の食塩水ができるか。

［解法１］

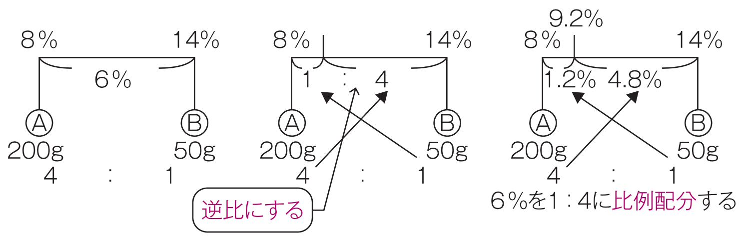
８％の食塩水と14％の食塩水をそれぞれA、Bとして、**表に書いて整理**すると以下のようになる。

	A	B	全体
濃度[%]	８%	14%	？
食塩水[g]	200g	50g	200＋50＝250［g］
食塩[g]	200×0.08＝16［g］	50×0.14＝7［g］	16＋7＝23［g］

$$(\text{混合後の濃度}) = \frac{23}{250} \times 100 = \underline{9.2\ [\%]}$$となる。

［解法２］

天秤法を用いる。**食塩水の重さの比と濃度変化の比は逆比の関係にある**ので、（食塩水Aの重さ）：（食塩水Bの重さ）＝200g：50g＝4：1より、（Aの混合前後の濃度変化）：（Bの混合前後の濃度変化）＝１：4となる。混合前のAとBの濃度差14－8＝6［%］を1：4に**比例配分する**と、６％を1＋4＝5［等分］すれば、１等分あたり6÷5＝1.2［%］であるから、1：4＝1.2×1：1.2×4＝1.2%：4.8%となる。混合後の食塩水の濃度は8＋1.2＝<u>9.2［%］</u>になる。



例題 1-6

３％の食塩水と８％の食塩水を混ぜ合わせ、６％の食塩水を500g作りたい。このとき、３％の食塩水は何g混ぜればよいか。

1. 180g
2. 200g
3. 250g
4. 270g
5. 300g

正解へのプロセス

食塩水の混合に関する問題の解法は大きく２つある。

［解法１］　混合後の食塩の重さの合計と食塩水の重さの合計に着目して解く。このときは表を書いて考えるとわかり易い。 表

［解法２］　天秤法で解く。２つの食塩水を混合すると、混合後の濃度は均一化される。（混合後の濃度）＝（平均値）＝（バランスする位置）より、天秤図を描いて考えるとわかり易い。 作図

解説

［解法１］　食塩の重さの合計と食塩水の重さの合計に着目して解く

３％の食塩水と８％の食塩水をそれぞれA、Bとして、A、Bの重さをそれぞれ x [g]、y [g]とおく。 目標

混合前後の濃度、食塩水の重さ、食塩の重さを以下のような表に整理する。 表

	A	B	全体
濃度[％]	３％	８％	６％
食塩水[g]	？＝x [g]	y [g]	500g
食塩[g]	$x \times 0.03$ [g]	$y \times 0.08$ [g]	$500 \times 0.06 = 30$ [g]

食塩水の重さの合計について、$x + y = 500$ [g]、食塩の重さの合計について、$0.03x + 0.08y = 30$ [g]が成り立ち、２つの式を連立方程式として解けば、$x = 200$ [g]、$y = 300$ [g]である。

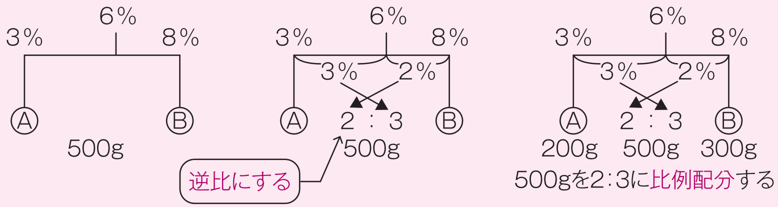
［解法２］　天秤法で解く

濃度変化が３％から６％の３％と、８％から６％の２％であるので、濃度変化の比はＡ：Ｂ＝３％：２％＝3：2である。

食塩水の重さの比と濃度変化の比は逆比の関係にあるので、(Ａの重さ)：(Ｂの重さ)＝2：3である。**解法のポイント**

これをもとに天秤図を描いていけば、左から右の順に**作図**できる。**作図**

食塩水の重さは両方合わせて500gであるから、500gを2：3に**比例配分**する。500gを2＋3＝5［等分］すれば、１等分あたり500÷(2＋3)＝100［g］であるから、2：3＝200g：300gに比例配分すればよい。したがって、３％の食塩水が200g、８％の食塩水が300gである。



正解　2

過去問Exercise

問題1

　ある高校で一年生全体に対して、現時点で考えている将来の進路について「進学希望」、「就職希望」、「未定」のいずれかを選択するようにアンケートを取ったところ、ア、イ、ウの結果を得た。「未定」を選択した生徒は何人か。

国家専門職2001

ア　一年生全体の生徒数と、「進学希望」と「就職希望」を選択した生徒数の合計の比は、5：4である。
イ　「就職希望」を選択した生徒数と一年生全体の生徒数の比は、9：50である。
ウ　「進学希望」を選択した生徒数は248人である。

1. 50人
2. 60人
3. 70人
4. 80人
5. 90人

解説

正解 4

全体はある高校の一年生であり、一年生を「進学希望」、「就職希望」、「未定」の３つに分けて、人数比を考える。３つの比が登場するので、本問は「**連比**」**の問題**である。**テーマの把握**

未定を選択した生徒数をx［人］とおく。**目標**

条件アとイの比の中で、共通している項目である「一年生全体」を利用して作図し、連比を作ると、次のようになる。

(就職希望者数)		(一年生全体の生徒数)		(進学希望者数)＋(就職希望者数)	
		5	:	4	
9	:	50			⇦ 10倍する
9	:	50	:	40	

(一年生全体の生徒数)＝(進学希望者数)＋(就職希望者数)＋(未定者数)であり、(一年生全体の生徒数)の比の値は50、(進学希望者数)＋(就職希望者数)の比の値は40であるから、(未定者数)の比の値は50－40＝10であり、(就職希望者数)の比の値が９であることより、(進学希望者数)の比の値は40－9＝31である[4]。

よって、条件ウより次の式が成り立つ。

$10:31=x:248$

(内項の積)＝(外項の積)より、**解法のポイント** $31\times x=10\times 248$となり、この式を解くと、$x=80$［人］である。

4　あくまで、比の値であり、具体的な値（人数）ではない。

問題2

　ある商品を120個仕入れ、原価に対し、５割の利益を上乗せして定価とし、販売を始めた。ちょうど半数が売れた時点で、売れ残りが生じると思われたので、定価の１割引きにして販売した。販売終了時刻が近づき、それでも売れ残りそうであったので、最後は定価の半額にして販売したところ、売り切れた。全体としては、原価に対し１割５分の利益を得た。このとき、定価の１割引きで売れた商品は何個か。

国家一般職2010

1. ５個
2. 15個
3. 25個
4. 45個
5. 55個

解説

正解 1

「損益算」の問題である。 **テーマの把握**

金額（円など）に関する数値が一切出てきていないので、商品１個あたりの**原価**を100円としても一般性を失わない[5]。 **具体化**

また、１割引きで売れた商品の個数をx［個］とする。 **目標**

「原価（100円）に対し、５割の利益を上乗せ」したので、１個あたり100×0.5＝50［円］の利益を上乗せして、定価150円で売り始めたことがわかる。半数である60個が売れた時点で、定価分では合計で50×60＝3000［円］だけの利益を得る。その後、定価150円の１割引きである150×0.1＝15［円］引きで販売したので、この販売価格は150－15＝135［円］となり、１個あたりの利益は135－100＝35［円］になる。これがx［個］だけ売れたので、135円で売れた商品からは合計で35×x［円］の利益を得る。残りの60－x［個］の商品の販売価格は定価の半額である75円で売ったのだから、75－100＝－25［円］より、１個あたり25円の損失が発生する。したがって、75円で売れた商品からは合計で25×（60－x）［円］の損失が発生する。

		価格	個数	利益	利益小計
原価		100円/個	120個		
売価	定価	150円/個	60個	50円/個	3000円
	1割引き	135円/個	x[個]	35円/個	35×x[円]
	半額	75円/個	60－x[個]	−25円/個	−25×(60－x)[円]

よって、一連の販売での総利益は3000＋35x－25×（60－x）［円］である。全体で１割５分の利益が出ているので、3000＋35x－25×（60－x）＝100×120×0.15が成り立つ。これを整理すれば、60x＝300となり、x＝5［個］である。

---

5 「一般性を失わない」とは数学などの論述解答で登場する表現であり、「条件を付加しても、解答には影響しない」という意味である。

問題3

Ａ課の職員27人が昨年１年間に取得した有給休暇取得日数の平均は、Ｂ課の職員15人のそれよりも1.4日多く、Ａ課とＢ課を合わせた平均取得日数は16.0日であった。Ａ課の職員が昨年１年間に取得した有給休暇の平均取得日数はどれか。

警視庁Ⅰ類2008

1. 16.2日
2. 16.3日
3. 16.4日
4. 16.5日
5. 16.6日

解説

正解 4

「平均」の問題である。 テーマの把握

［解法１］　合計に着目して、方程式で解く

求めたいＡ課の有給休暇平均取得日数をx［日/人］とおくと、Ｂ課のそれは$x-1.4$［日/人］と表せる。 目標

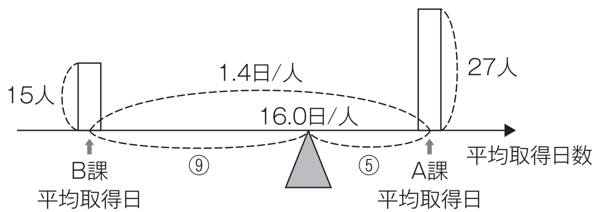
Ａ課とＢ課を合わせた全体の人数は27＋15＝42［人］である。**これをもとに表を書いて**考えれば、下表のようになる。 表

	Ａ課	Ｂ課	全体（Ａ＋Ｂ）
平均取得日数［日/人］	x	$x-1.4$	16.0
人数［人］	27	15	42
合計［日］	$x\times27$	$(x-1.4)\times15$	$16.0\times42=672$

合計に着目すれば、$27x+15(x-1.4)=672$となり、これを解けば、$x=16.5$［日/人］となる。

［解法２］　天秤法で解く

Ａ課とＢ課の人数の比は27：15＝9：５である。**これをもとに天秤図を描く**と、下図のようになる。 作図



Ａ課とＢ課の平均取得日数の差である1.4日/人を（⑨＋⑤＝）14等分すれば、一等分あたり、1.4÷14＝0.1［日/人］となるので、⑤に対応する数値は0.1×５＝0.5［日/人］となる。

ゆえに、Ａ課の平均取得日数は16.0＋0.5＝16.5［日/人］となる。

問題4

甲、乙２種類の食塩水がある。甲３、乙１の割合で混ぜ合わせると濃度５％、甲１、乙３の割合で混ぜ合わせると濃度７％の食塩水が得られる。このとき、甲の食塩水の濃度に最も近いものは、次のうちどれか。

裁判所一般職2003

1. 2.6%
2. 3.6%
3. 4.6%
4. 5.6%
5. 6.6%

解説

正解 2

「濃度と混合」の問題である。 テーマの把握

甲の食塩水の濃度をx［%］、乙の食塩水の濃度をy［%］とする。 目標

［解法１］　食塩の重さに着目して解く

甲３、乙１の割合で混ぜ合わせるとき、**実際の重さの数値が書かれていないので、甲を300［g］、乙を100［g］と仮定しても、一般性を失わない**。このとき、**表を書いて**考えれば、以下のようになる。 表

	甲	乙	全体
濃度[%]	x［%］	y［%］	5%
食塩水[g]	300g	100g	300＋100＝400［g］
食塩[g]	$300\times\frac{x}{100}=3x$［g］	$100\times\frac{y}{100}=y$［g］	400×0.05＝20［g］

食塩の合計に着目すれば、$3x+y=20$［g］…①が成り立つ。

同様に、甲１、乙３の割合で混ぜ合わせるとき、甲を100［g］、乙を300［g］とすれば、以下のようになる。

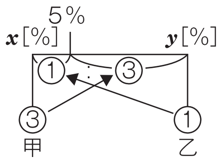
	甲	乙	全体
濃度[%]	x［%］	y［%］	7%
食塩水[g]	100g	300g	100＋300＝400［g］
食塩[g]	$100\times\frac{x}{100}=x$［g］	$300\times\frac{y}{100}=3y$［g］	400×0.07＝28［g］

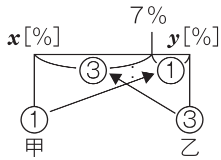
食塩の合計に着目すれば、$x+3y=28$［g］…②が成り立つ。①、②を連立すれば、$x=4$［%］、$y=8$［%］を得る。

［解法２］　天秤法で解く

甲３、乙１の割合で混ぜ合わせると濃度５％、甲１、乙３の割合で混ぜ合わせると濃度７％の食塩水ができるので、食塩水の濃度は$x<y$である。天秤図を描けば、**作図**（混合による甲の濃度変化）：（混合による乙の濃度変化）＝（乙の重さ）：（甲の重さ）であるので、（$5-x$）：（$y-5$）＝１：３、（$7-x$）：（$y-7$）＝３：１の２つの比例式が成り立つ。（外項の積）＝（内項の積）より、$3(5-x)=y-5$と$7-x=3(y-7)$となり、この連立方程式を解けば、$x=4$［％］、$y=8$［％］を得る。

ゆえに、甲の食塩水の濃度$x=4$［％］に**最も近いもの**は②の3.6％である。





4 速　さ

「速さ」は文章題の一分野であり、公務員試験でも頻出テーマです。そこで、学習を容易にするために、「旅人算（出会い算と追いかけ算）」、「周回算」、「流水算」、「通過算」、「仕事算」、「ニュートン算」など、定番のテーマに分類しています。解法は、今までに学んだ手法を使っていきますが、単位変換などの新しい手法も登場します。

1 速さの３要素と３公式

1 速さの問題

速さの問題では、ある「速さ」で、いくらかの「時間」をかけて、ある「距離」を移動する人や車などが登場する。この「速さ」、「時間」、「距離」の３要素に関する式を使いながら、未知のものを求める問題が出題される。以下では、速さの問題で登場する３要素とその関係について説明する。

① 速　さ

「**速さ**」とは、**単位時間あたりの変化量**を表したものである[1]。

単位時間とは、１秒、１分、１時間、１日、…など、「１」の付く時間のことである。

・１秒あたりの変化量を「秒速」という。
・１分あたりの変化量を「分速」という。
・１時間あたりの変化量を「時速」という。

特に、**移動における速さ**は、**単位時間あたりの移動距離**で定義される。

以下では、特に断りがない限り、移動における速さを考える。

② 速さの３要素

移動における速さを考えるとき、**速さ・時間・距離**（**道のり**）を「**速さの３要素**」という。

1　例えば、ウイルスが増殖する速さやうわさが広がる速さなど、速さには様々なものがある。公務員試験では、仕事の速さなども登場する（後述）。

例1

　一定の速さで歩く人が、200mを５分で移動したとき、この人の歩く速さは１分あたり200÷5＝40［m］である。

　また、分速40mで歩く人が200mを移動するには、200÷40＝5［分］かかる。

　分速40mで歩く人が５分歩くと、40×5＝200［m］移動する。

　この例からもわかるように、**速さの３要素の間には互いにつながり（関係式）がある**。これが、次の「**速さの３公式**」である。

③ 速さの３公式

　次の３つの式を「**速さの３公式**」という。

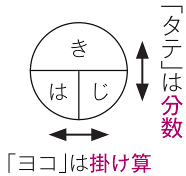
速さの３公式

$$(\text{速さ})=(\text{距離})\div(\text{時間})=\frac{(\text{距離})}{(\text{時間})}$$

$$(\text{時間})=(\text{距離})\div(\text{速さ})=\frac{(\text{距離})}{(\text{速さ})}$$

$$(\text{距離})=(\text{速さ})\times(\text{時間})$$

速さの３公式の覚え方



「は」＝（速さ）
「じ」＝（時間）
「き」＝（距離）

※求めたいものを隠すと、式が現れる。

※　１つの式からスタートして変形すれば、残りの２つの式は簡単に導出できる。

2 単位換算

　速さの問題を解く際に、単位（基準）を揃える必要が生じる。このとき、次のように単位換算を行う。

① 時間について

$$1\text{時間}=60\text{分}、\frac{1}{60}\text{時間}=1\text{分}$$

$$1\text{分}=60\text{秒}、\frac{1}{60}\text{分}=1\text{秒}$$

より、図１のように単位換算できる。

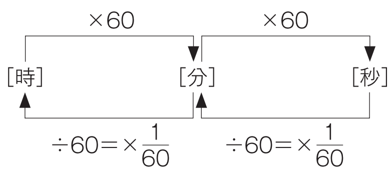


図１

例2

2時間15分の単位を[分]に揃えると、2時間＝1時間×2＝60分×2＝120分より、120＋15＝135［分］である。これを図1のように単位換算すれば、$2\times60+15=135$［分］となる。また、2時間15分の単位を[時間]に揃えると、15分＝1分×15＝$\frac{1}{60}$時間×15＝$\frac{15}{60}$時間＝$\frac{1}{4}$時間より、2時間15分＝$\left(2+\frac{1}{4}\right)$時間＝$\frac{9}{4}$時間である。これを図1のように単位換算すれば、$2+\frac{15}{60}=\frac{9}{4}$[時間]となる。

例3

12分48秒の単位を[秒]に揃えると、12分＝1分×12＝60秒×12＝720秒より、720＋48＝768［秒］である。これを図1のように単位換算すれば、$12\times60+48=768$［秒］となる。また、12分48秒の単位を[分]に揃えると、48秒＝1秒×48＝$\frac{1}{60}$分×48＝$\frac{48}{60}$分＝$\frac{4}{5}$分より、12分48秒＝$\left(12+\frac{4}{5}\right)$分＝$\frac{64}{5}$分である。これを図1のように単位換算すれば、$12+\frac{48}{60}=\frac{64}{5}$[分]となる。

② 距離について

$$1\,\text{km}=1000\,\text{m}、\frac{1}{1000}\text{km}=1\,\text{m}$$

より、図2のように単位換算できる。

$$\begin{tikzcd}
{[\text{km}]} \arrow[r, bend left, "\times1000"] & {[\text{m}]} \arrow[l, bend left, "\div1000=\times\frac{1}{1000}"]
\end{tikzcd}$$

図2

例4

1250mの単位を[km]に変換すると、1250m＝1m×1250＝$\frac{1}{1000}$km×1250＝$\frac{1250}{1000}$km＝1.25kmである。これを図2のように単位換算すれば、$\frac{1250}{1000}=1.25$［km］となる。逆に、1.25kmの単位を［m］に変換すると、1.25km＝1km×1.25＝1000m×1.25＝1250mである。これを図2のように単位換算すれば、$1.25\times1000=1250$［m］となる。

③ 速さについて

秒速1m＝分速60m＝時速3600m＝時速3.6km

より、図3のように単位換算できる。

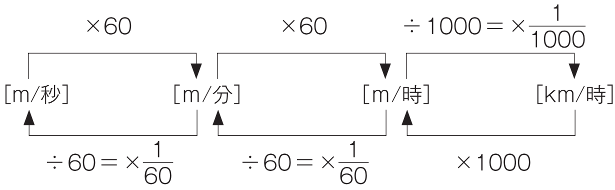


図3

例5 時速72kmの単位を秒速[m/秒]に変換すると、72km/時＝72000m/60分＝1200m/分＝1200m/60秒＝20m/秒となるので、秒速20mである。これを図3のように単位換算すれば、72×1000÷60÷60＝20［m/秒］となる。逆に秒速20mの単位を時速[km/時]に変換すると、20m/秒は「1秒あたり20m進む速さ」であるから、「60秒で20×60m進む速さ」＝1200m/60秒＝1200m/分＝1.2km/分であり、1.2km/分は「1分あたり1.2km進む速さ」であるから、「60分で1.2×60km進む速さ」＝72km/60分＝72km/時となる[2]。よって、時速72kmである。これを図3のように単位換算すれば、20×60×60÷1000＝72［km/時］となる。

3 速さの問題の基本的な考え方

① 情報の整理と目標の設定

問題文を読む際は、**登場人物やものについて、速さの3要素のうち何が与えられていて、何を求めるのかを考えなければならない。**

はじめのうちは、次のように**速さの3要素を表に整理**すると、何が与えられていて、何を求めればよいかがわかりやすくなる。

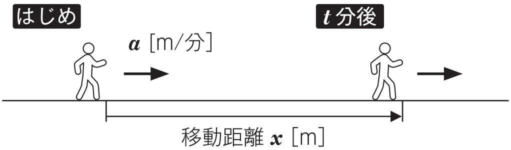
人、もの	A	B
速さ(は)		
時間(じ)		
距離(き)		

上のような表を書き、問題文から与えられている3要素を書き込んでいく。具体的に書き込んでいく様子は、例題1-7の **正解へのプロセス** で紹介する。

2　72km/時＝72km/hと表すこともある。hは時間（hour）の頭文字である。

② 状況把握

具体的にイメージをする際は、道のりの図(線分図の一種)に速さの３要素を書き込んで状況把握するとわかりやすい。



③ 立　式

大きく分けると次の２つの方針がある。

（ア）速さの３公式を用いて解く

１つ目は速さの３公式を用いて、方程式で解くというものである。

速さの３公式に当てはめて解くだけに思えるが、未知数に対応する文字を複数設定する必要も生じ、計算が煩雑になることもある。

（イ）比を用いて解く

登場人物やものの速さの３要素の中に、一致するものが１要素でもあれば、残りの２要素間に比例式を立てて解くことができる。

4 比を用いた立式

比を用いて解く場合は、次のようにまとめられる。

① 同じ速さで移動するとき

同じ速さで移動するとき、**距離と時間は正比**(比例)の関係になる。

例6

分速100mでランニングするとき、30分走る場合と50分走る場合の走った距離の比は3000：5000＝30：50であり、**距離と時間は正比**の関係になる。

	30分走るとき	50分走るとき
速さ(は)	**100m/分 ←同じ→ 100m/分**	
時間(じ)	30分	50分
距離(き)	3000m	5000m

② 同じ時間で移動するとき

同じ時間で移動するとき、**速さと距離は正比**(比例)の関係になる。

例7

毎日20分歩いている。普段、分速40mで歩くところを、今日はいつもの２倍のスピードで歩くと、普段と今日の距離の比は800：1600＝40：80であり、**速さと距離は正比**の関係になる。

	普段	今日
速さ(は)	40m/分	80m/分
時間(じ)	**20分 ←同じ→ 20分**	
距離(き)	800m	1600m

③ 同じ距離を移動するとき

同じ距離を移動するとき、速さと時間は逆比（反比例）の関係になる。

例8

12km離れた町を同じ道を通って往復するとき、行きを時速6km、帰りを時速4kmで歩けば、行きと帰りの所要時間はそれぞれ$\frac{12}{6}=2$［時間］、$\frac{12}{4}=3$［時間］かかり、所要時間の比は2：3である。したがって、時間の比は速さの比である6：4＝3：2と逆比の関係になる。

	行き	帰り
速さ（は）	6km/時	4km/時
時間（じ）	2時間	3時間
距離（き）	12km ←同じ→ 12km	

例題 1-7

甲乙間を往復するのに、往路は時速12kmで行き、復路は時速16kmで戻ったところ、かかった時間は３時間30分だった。甲から乙までの距離として、正しいのはどれか。

1. 18km
2. 24km
3. 30km
4. 36km
5. 42km

正解へのプロセス

① 問題文の読み方と目標の設定

速さの問題では、速さの３要素のうち何が与えられていて、何を求めるのか確認する。

そこで、問題文の中で登場した速さの３要素とその値にそれぞれアンダーラインと 囲い を付けると次のようになる。

「甲乙間を往復するのに、往路は 時速12km で行き、復路は 時速16km で戻ったところ、かかった時間は ３時間30分 だった。甲から乙までの距離として、**目標** 正しいのはどれか。」

そこで、求めたい**甲乙間の距離を** x[km]とおく。

② 状況把握

これらを、**道のりの図**に描いて**作図**し、**速さの３要素**を**表に整理**する。 **作図** **表**

このとき、あらかじめ**単位変換**をして、**単位を揃えておく**とよい。 **基準**

$$往復３時間30分 = 3 + \left(\frac{30}{60}\right)時間 = \frac{7}{2}時間$$

	往路	復路	合計
速さ(は)	12[km/時]	16[km/時]	
時間(じ)			$\frac{7}{2}$時間
距離(き)	x[km]	x[km]	$2x$[km]

一致

表を書くと、速さの３要素の中で距離が一致していることがわかる。

③ 速さの問題の立式と２つの解法

速さの３公式を用いて方程式を立てれば、公務員試験で出題される速さの問題は原則的にどんな問題でも解くことができる。しかし、速さの３要素の中に一致する要素が１要素でもあれば、残りの２要素間に比例式を立てて解くこともできる。

解法のポイント

比例式を立てる場合、速さの３公式に当てはめて解くのではないので、方程式の解法に比べて立式は難しくはなるが、設定する文字の数を減らすことができ、計算が簡単になる。

そこで、本問では２つの解法を紹介する。どちらかの解法で解ければよいので、自分に合った解法を見つけてもらいたい。

［解法１］　速さの３公式を用いて解く

速さの３公式を用いて、方程式で解くときは、速さの３要素を文字で表して具体化する。 **公式** **具体化**

上表より、時間については、往路が$\frac{x}{12}$[時間]かかり、復路が$\frac{x}{16}$[時間]かかる。

未知数がxの１つだけであるから、方程式は１つだけ立式すればよい。

［解法２］　比を用いて解く

上表より、距離が往路と復路で一致しているので、速さと時間が逆比の関係になることを利用する。往路と復路について、速さの比は12：16＝３：４なので、時間の比は４：３になる。 **解法のポイント**

解説

[解法１]　速さの３公式を用いて解く

甲から乙までの距離をx[km]とすれば、**目標** 往路の所要時間は$\frac{x}{12}$[時間]かかり、復路の所要時間は$\frac{x}{16}$[時間] かかる。

下表のように**速さの３要素を表に整理**すると、**表** 往復の所要時間である３時間30分は３時間30分＝$3+\frac{30}{60}$時間＝$3+\frac{1}{2}$時間＝$\frac{7}{2}$時間であるから、**合計所要時間に着目すれば、次の方程式が成り立つ。**

$$\frac{x}{12}+\frac{x}{16}=\frac{7}{2}\cdots①$$

	往路	復路	合計
速さ(は)	12	16	
時間(じ)	$\frac{x}{12}$	$\frac{x}{16}$	$\frac{7}{2}$
距離(き)	x	x	$2x$

①の両辺に12と16の最小公倍数である48を掛けて整理すれば、$4x+3x=7\times24$となり、$x=24$ [km]を得る。

[解法２]　比を用いて解く

上表を見れば、**甲乙間の往路、復路はともに距離が等しいので、往路と復路の速さの比と、往路と復路の時間の比には逆比の関係が成り立つ。** **解法のポイント**

速さは往路の時速12km、復路の時速16kmであるので、(往路の速さ)：(復路の速さ)＝12：16＝3：4である。所要時間の比は速さの逆比であるので、**(往路の所要時間)：(復路の所要時間)＝4：3**であり、往復の所要時間である３時間30分＝$\frac{7}{2}$時間を、往路と復路で4：3に比例配分すればよい。

$\frac{7}{2}$時間を（4＋3＝）７等分すれば、１等分あたり$\frac{7}{2}\div7=\frac{1}{2}$[時間] である。

したがって、往路の所要時間は$\frac{1}{2}\times4=2$[時間]、復路の所要時間は$\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2}$[時間] となる。

あるいは次のように比例配分してもよい。往路の所要時間＝$4\boldsymbol{k}$ ［時間］、復路の所要時間＝$3\boldsymbol{k}$ ［時間］とすれば、$4\boldsymbol{k}+3\boldsymbol{k}=\dfrac{7}{2}$より、$\boldsymbol{k}=\dfrac{1}{2}$である。よって、往路の所要時間＝$4\times\dfrac{1}{2}=2$［時間］、復路の所要時間＝$3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$［時間］である。

したがって、甲から乙までの距離（往路の移動距離）は（速さ）×（時間）＝12×2＝24 ［km］である。

正解 2

2 旅人算

1 旅人算

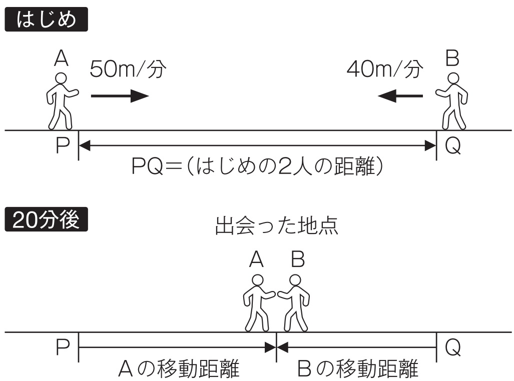
何人かの人やいくつかのもの(例えば何台かの車など)が、**互いに逆向きに移動**して、出会う(すれ違う)場合の速さの問題を「**出会い算**」、**互いに同じ向きに移動**して、早い方が遅い方を追い抜く場合の速さの問題を「**追いかけ算**」という。出会い算と追いかけ算をまとめて「**旅人算**」という。

出会い算と追いかけ算の例を見てもらいたい。

① 出会い算

例9

2地点P、Qを結ぶ一本の道路があり、AがPからQへ向かって、BがQからPへ向かって、この道路をそれぞれ同時に歩き始めた(下図)。Aは分速50mで、Bは分速40mで歩いたところ、2人が出会うまで20分かかった。PQ間の距離はいくらか。



図を見ると一目瞭然だが、**PQ=(Aの移動距離)+(Bの移動距離)**が成り立つ。

Aの移動距離は50×20=1000［m］、Bの移動距離は40×20=800［m］であるから、PQ=1000+800=<u>1800［m］</u>である。

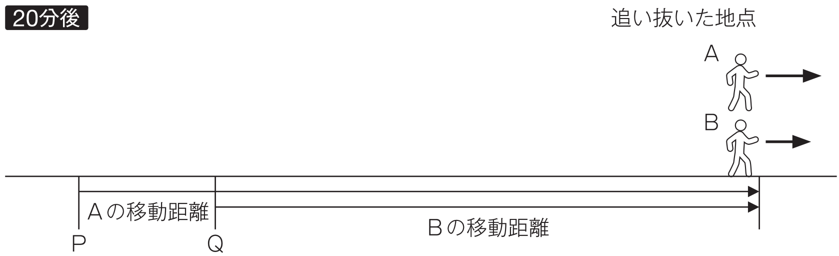
次のように考えてもよい。(はじめの2人の距離)=PQであり、1分経つごとに、2人の距離は50+40=90［m］縮まる。20分間で90×20=1800［m］縮まり、2人の距離は0mになってAとBは出会うのだから、

(**はじめの2人の距離**)−(**縮まった距離**)=(**おわりの2人の距離**)

より、(はじめの２人の距離)－1800［m］＝0［m］である。よって、PQ＝(はじめの２人の距離)＝1800［m］である。

② 追いかけ算

例10 一本の道路があり、この道路をＡは分速50mで、Ｂは分速40mで同じ方向に歩いている。Ａが地点Ｐを通過したとき、Ｂは地点Ｑを通過し、このときからちょうど20分後にＡはＢを追い抜いた(下図)。PQ間の距離はいくらか。



これも、図を見ると一目瞭然だが、**PQ＝(Ａの移動距離)－(Ｂの移動距離)**が成り立つ。

Ａの移動距離は50×20＝1000［m］、Ｂの移動距離は40×20＝800［m］であるから、PQ＝1000－800＝200［m］である。

次のように考えてもよい。(はじめの２人の距離)＝PQであり、１分経つごとに、２人の距離は50－40＝10［m］縮まる。20分間で10×20＝200［m］縮まり、２人の距離は０mになって、ＡがＢを追い抜くのだから、

(はじめの２人の距離)－(縮まった距離)＝(おわりの２人の距離)

より、(はじめの２人の距離)－200［m］＝0［m］である。ここで、(おわりの２人の距離)＝0［m］とした。よって、PQ＝(はじめの２人の距離)＝200［m］である。

以上の例を踏まえて、旅人算での解法のポイントをまとめておく。

2 旅人算の状況把握

道のりの図に速さの３要素を書き込む。

旅人算(出会い算・追いかけ算)では、道のりの図を描けば、状況が把握しやすくなることがわかるだろう。

※　しかし、問題の登場人物が３人以上の場合、道のりの図が**作図しづらく、状況も把握しづらい**。また、２人が区間を往復する問題などの**複雑な問題**や、与えられている条件が所要時間のみのような**抽象的な問題**では、ダイヤグラム(後述)というグラフを用いるとわかりやすい。

3 旅人算の立式と公式

旅人算の基本公式は次式である。

　(**はじめの２人の距離**)－(**縮まった距離**)＝(**おわりの２人の距離**)

問題を解くときは、この式をベースにして、少し手を加えた次の①、②の２つの立式を使えるとよい。どちらの立式の仕方も習得してもらいたいが、いずれも登場人物の**移動距離に着目して立式**するとよい。

① 出会う瞬間、追い抜く瞬間に着目したとき

登場人物２人が出会う瞬間や追い抜く瞬間は、互いの距離が０になる。したがって、(**おわりの２人の距離**)＝**０**とすれば、このとき、旅人算(出会い算・追いかけ算)の公式は次のようになる。

旅人算の公式Ⅰ

❶【出会い算の公式Ⅰ】

２人が同じ道を**逆向き**に進み、しばらくして出会うとき、

(はじめの２人の距離)＝(出会う瞬間までの２人の移動距離の**和**)

❷【追いかけ算の公式Ⅰ】

２人が同じ道を**同じ向き**に進み、しばらくして早い方が遅い方を追い抜くとき、

(はじめの２人の距離)＝(追い抜く瞬間までの２人の移動距離の**差**)

※　これは、出会う瞬間や追い抜く瞬間までしか使えない公式だが、途中で速さが変化しても成り立つ式である。

② ２人の速さに変化がないとき

はじめからおわりまで２人の速さに変化がない(速さが一定の)とき、単位時間だけ経過するごとに２人の距離は、出会い算では「速さの和」だけ、追いかけ算では「速さの差」だけ縮まる[3]。したがって、次式が成立する。

旅人算の公式Ⅱ

２人の速さに変化がない(速さが一定の)とき、

❶【出会い算の公式Ⅱ】

(はじめの２人の距離)－(速さの和)×(時間)＝(おわりの２人の距離)

❷【追いかけ算の公式Ⅱ】

(はじめの２人の距離)－(速さの差)×(時間)＝(おわりの２人の距離)

※　これは、２人の速さが変化しない場合にしか使えない公式だが、「出会う・出会わない」や「追い抜く・追い抜かない」に関わらず成り立つ式である。なお、「出会う・追い抜く」ときは、(おわりの２人の距離)＝０とすればよい。

4 旅人算と比の関係

同時に出発して、その後２人が一定の速さで進むとき、出会ったり(すれ違ったり)追い抜いたりするまでの２人の移動時間が同じになるので、２人の速さと距離には正比(比例)の関係が成り立つ。

実際、例1および例2の場合も、(Ａの速さ)：(Ｂの速さ)＝50：40＝５：４、(Ａの移動距離)：(Ｂの移動距離)＝1000：800＝５：４であり、確かに速さの比と移動距離の比が一致する。

3　この「速さの和」や「速さの差」は２人の「相対的な速さ」を表している。旅人算の基本公式である（はじめの2人の距離）－（縮まった距離）＝（おわりの2人の距離）は、2人の「相対的な距離」に関する式であり、旅人算は「速さの相対問題」であると考えることができる。

例題 1-8

ＡはＰ町を15時ちょうどに出発し、Ｑ町に16時40分に到着した。また、ＢはＱ町を15時40分に出発し、Ｐ町に16時30分に到着した。２人が同じ道を一定の速さで進んだとすると、２人が出会った時刻として、正しいのはどれか。

1. 16時00分
2. 16時05分
3. 16時10分
4. 16時15分
5. 16時20分

正解へのプロセス

① 問題文の読み方

まず、**ＡとＢの２人の進行方向が逆向きであるから「出会い算」の問題**である。

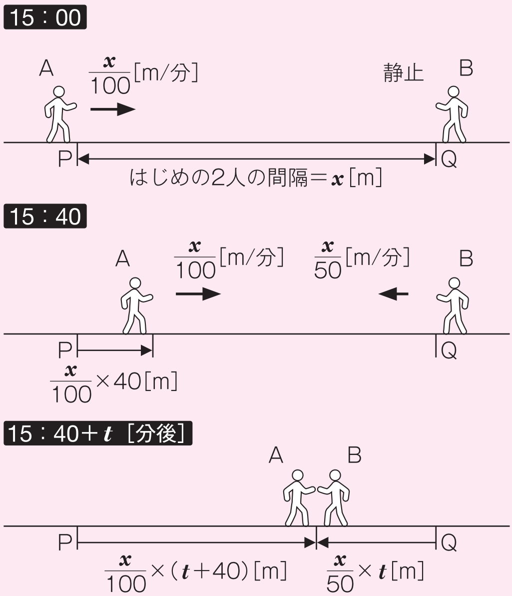
テーマの把握

本問は時刻の情報しか与えられておらず、速さの３要素にわからないものが多い。距離や速さなどの数値が具体的に与えられていないので、**距離の単位(基準)を[m]としても、[km]としても一般性は失わない**。そこで、速さの３要素のうち未知数の１つである**PQ間の距離をx [m]とする**。 **具体化** **基準**

ＡはPQ間を16:40－15:00＝１時間40分＝100分間で、ＢはQP間を16:30－15:40＝50分間で進むので、Ａ、Ｂの分速はそれぞれ$\frac{x}{100}$[m/分]、$\frac{x}{50}$[m/分]である。これらを表に整理すると次表のようになる（表１）。 **表**

表１	A	B
速さ(は)	$\frac{x}{100}$[m/分]	$\frac{x}{50}$[m/分]
時間(じ)	100[分]	50[分]
距離(き)	x[m]	x[m]

次に、時系列に**道のりの図**を描きながら状況を把握していく。 **作図**



② 目標の設定

本問の目標は２人が出会った時刻である。そこで、**Bが出発する15：40からt**［分後］に２人が出会うとする。 **目標**

③ 本問の注意点

特筆すべき点は、15:00から15:40の間、BはQから動いていない。つまり、この間のBの速さは0 m/分である。したがって、**Bの速さは15:40を境に変化しており、一定とはいえない**ことに注意したい。

出会うまでの行程に関して、A、Bの速さの３要素を表に整理する(表２)。 **表**

表2	A	B
速さ(は)	$\frac{x}{100}$[m/分]	$\frac{x}{50}$[m/分]
時間(じ)	$t+40$[分]	t[分]
距離(き)	$\frac{x}{100}\times(t+40)$ [m]	$\frac{x}{50}\times t$[m]

表１ではAとBの移動距離が一致していたが、表２では速さの３要素のうち一致する要素がない。**速さの３要素のうち一致する要素がなければ、比で解くことができず、方程式で解くしかない。**

そこで、出会い算の公式Ⅰを用いて立式して、未知数tを求めていく。

解法のポイント

※　なお、15:40以降は２人の移動時間が同じになる。

解説

ＡはPQ間を100分間で、ＢはQP間を50分間で進むので、PQ間の距離をx[m]とすると、Ａ、Ｂの分速はそれぞれ$\frac{x}{100}$[m/分]、$\frac{x}{50}$[m/分]である。

Ｂが出発する15:40からt[分後]に２人が出会うとすると、**目標** Ａは15:00から15:40まで１人で40分間進むので、出会い算の公式Ⅰで、(はじめの２人の距離)＝PQ、(出会う瞬間までの２人の移動距離の和)＝(Ａの進んだ距離)＋(Ｂの進んだ距離)として、PQ＝（Ａの進んだ距離）＋（Ｂの進んだ距離）より、**公式** $\frac{x}{100}\times(t+40)+\frac{x}{50}\times t=x$である[4]。

両辺をxで割ってから100を掛けると、$(t+40)+2\times t=100$となり、整理すれば$3t=60$となる。これを解けば$t=20$［分後］を得る。よって、出会った時刻は、15:40＋(20分)＝16:00である。

正解　1

4　未知数がxとtの２つに対し、式が１つなので、この方程式は不定方程式である。実際xは求められず不定であるが、目標であるtは求められる。

3 周回算

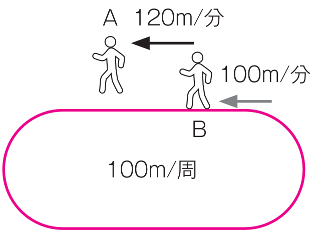
1 周回算

２人（２つ）以上の人（もの）が周回する旅人算を「**周回算**」という。２人（２つ）の進行方向が逆向き（互いに逆回り）のときは「**出会い算**」であり、進行方向が同じ向きのときは「**追いかけ算**」である。

周回算は旅人算の一種であるから、旅人算の考え方がそのまま使える。つまり、**登場人物の移動距離の和・差に着目して立式**すればよい。また、周回算では「～分ごとに」という「**周期**」が登場することが多い。

例11

下図のような１周100mのグラウンドのトラックを、Ａは分速120mの速さで、Ｂは分速100mの速さで同一方向に周回している。ＡはＢを何分ごとに追い抜くだろうか。



ＡがＢと並んでから、１分後にはＡが120m進み、同一方向にＢが100m進むので、ＡはＢから見て20m先行する。さらに１分経てばＡはＢから20×2＝40［m］先行する。ＡがＢと並んでから５分後、ＡはＢから20×5＝100［m］先行するが、100m進むと１周するので、位置として見れば、ＡはＢと並ぶ。つまり、Ａは周回遅れのＢを追い抜く。よって、ＡはＢを５分ごとに追い抜く。

このことを、改めて次のように計算して考えてみる。

１分ごとに２人の距離は**速さの差**である120－100＝20［m］だけ開いていく。１周分である100mだけ開いたときが「追い抜く」瞬間であるから、100÷20＝5［分］ごとに追い抜く。

よって、追い抜く周期は（追い抜く周期）＝（周の長さ）÷（速さの差）として計算できる。言い換えれば、（**速さの差**）×（**追い抜く周期**）＝（**周の長さ**）が成り立つことがわかる。

なお、この追い抜く周期である５分間でＡは120×５＝600[m]進むので６周しており、Ｂは100×５＝500[m]進むので５周している。したがって、**２人の移動距離にちょうど１周分の差**(600－500＝100[m])**が生じている**ことがわかる。

2 周回算の公式

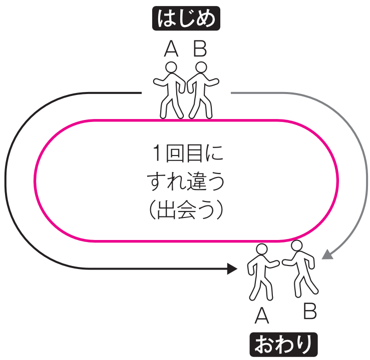
上の例では追いかけ算について取り上げたが、出会い算については、左下のように図を描いて、距離の和に着目してもわかり易い。

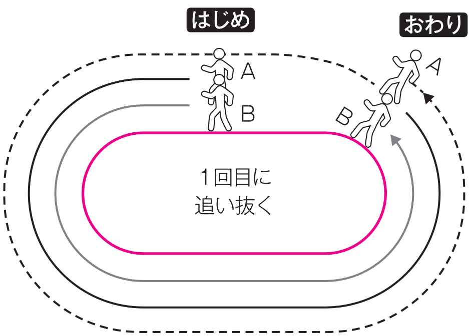
下図のように、ＡとＢの２人が逆向きに同一地点からスタートして、１回目に出会うときは、**２人の移動距離の和が１周分**になっていることがわかる。したがって、

（２人の移動距離の和）＝（２人の速さの和）×（すれ違いの周期）＝（周の長さ）

であることがわかる。

例11の最後にも示したが、追いかけ算についても右下図のように図を描いて、距離の差に着目してみれば、同一地点から、２人が同じ向きにスタートして１回目に追い抜くときは、**２人の移動距離の差が１周分**（図の破線分）になっていることがわかる。





以上より、周回算では次式が成り立つ。

周回算の公式（２人が一定の速さで進む場合）

❶【周回算（出会い算）の公式】
２人が周回路を逆向きに進み、しばらくしてすれ違うとき、
（２人の速さの和）×（すれ違いの周期）＝（周の長さ）

❷【周回算（追いかけ算）の公式】
２人が周回路を同じ向きに進み、しばらくして早い方が遅い方を追い抜くとき、
（２人の速さの差）×（追い抜きの周期）＝（周の長さ）

例題 1-9　１周400mの池の周りを、Ａは５分、Ｂは３分で１周する。今、ＡとＢがＰ地点から反対方向に同時に出発したとき、３回目に２人が出会う地点に関する記述のうち、正しいのはどれか。

1. Ｐ地点
2. Ｐ地点よりＡの進行方向50mの地点
3. Ｐ地点よりＡの進行方向100mの地点
4. Ｐ地点よりＡの進行方向150mの地点
5. Ｐ地点よりＡの進行方向200mの地点

正解へのプロセス

① 問題文の読み方

「１周400mの池の周りを…ＡとＢが…反対方向に同時に出発した」とあるので、**本問は「周回算（出会い算）」の問題である。** **テーマの把握**

速さの問題では、「速さの３公式を用いて方程式で解く」か「比を用いて解く」の２つの解法があるが、周回算では、周回算の公式を用いる解法が速さの３公式を用いて方程式で解く解法に相当する。 **解法のポイント**

２つ目の解法として、比を用いて解けないかを考える。つまり、速さの３要素のうち一致するものがあるかを探すのである。**旅人算や周回算では、同時に出発する場合、２人の出会う・追いつくまでの時間が同じであるから速さと移動距離に正比（比例）の関係が成り立つ。**

本問では、「**同時に出発**」しているので、比で解くこともできる。

本問の目標は「３回目に２人が出会う地点」とあるが、まずは「１回目に２人が出会う地点」を基準に考えるとよい。**周期が登場する周回算では１周期分の動きを考えるとわかりやすい。** **目標** **基準**

② 周回算の公式の使い方

周回算（出会い算）の公式（**２人の速さの和**）×（**すれ違いの周期**）＝（**周の長さ**）より、公式に代入する諸量のうち、何がわかっていて、何を求めるべきかを考えたい。 **公式**

（周の長さ）＝400［m］であるので、「ＡとＢの２人の速さ」や「すれ違いの周期」

が求められないかを考えてみる。Aは5分で400m進むことから、速さが$\frac{400}{5}=80$[m/分]であることがわかり、Bは3分で400m進むことから、速さが$\frac{400}{3}$[m/分]であることがわかる。そこで、「すれ違いの周期」をx[分]とすると、周回算(出会い算)の公式に代入すれば、(2人の速さの和)×(すれ違いの周期)=(周の長さ)より、$\left(80+\frac{400}{3}\right)x=400$と立式できる。これを解けば、$x=\frac{15}{8}$[分]を得る。

「すれ違い(出会い)の周期」=「1回目に出会うまでの時間」が$\frac{15}{8}$[分]であることから、3回目に出会うまでにかかる時間はその3倍である$\frac{15}{8}\times 3=\frac{45}{8}$[分]である。

あとは、上で求めた諸量を用いて、どのように解答までたどり着けばよいかを考えてもらいたい。

③ 周回算と比

速さの3要素の中に一致する要素が1要素でもあれば、残りの2要素間に比例式を立てて解くことができる。

「池の周りを、Aは5分で、Bは3分で1周する」ということは、AとBが同じ距離(1周)を進むときの所要時間がそれぞれ5分と3分であるということである。移動距離が等しいとき、速さと時間は逆比の関係になることに注目する。これより、AとBの速さの比は所要時間の逆比である3:5である。

同時に出発したので、AとBの所要時間は等しい。したがって、速さと距離が正比の関係になることに注目すると、AとBの速さの比は3:5より、2人の移動距離の比は常に3:5である。

解説

[解法1]　周回算(出会い算)の公式で解く(速さの3公式を用いて解く)

Aは5分で400m進むことから、速さが$\frac{400}{5}=80$ [m/分]であることがわかり、Bは3分で400m進むことから、速さが$\frac{400}{3}$[m/分]であることがわかる。

周回算(出会い算)の公式より、2人が1回目に出会うまでの時間をx [分]とす

ると、$\left(80+\frac{400}{3}\right)\boldsymbol{x}=400$となる。**公式**10で割って整理すれば、$\left(8+\frac{40}{3}\right)\boldsymbol{x}=40$から$\frac{64}{3}\boldsymbol{x}=40$となり、$\boldsymbol{x}=40\div\frac{64}{3}=40\times\frac{3}{64}=\frac{15}{8}$[分]である。

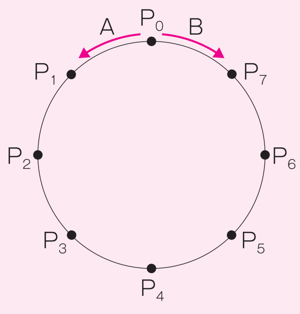
1回目に出会うまでの時間が$\frac{15}{8}$[分]であることから、3回目に出会うまでにかかる時間は$\frac{45}{8}$[分]である。この時間でAの進んだ距離は、$80\times\frac{45}{8}=450$ [m]となり、2人が出会ったのは、Aが1周して（400mまわって）からさらに50m進んだ地点である。

[解法2]　比を用いて解く

池の周りをAは5分で、Bは3分で周回するということは、AとBが**同じ距離（1周）を進む**ときの所要時間がそれぞれ5分と3分であるということである。これより、**AとBの速さの比は所要時間の逆比である3：5**である。**解法のポイント**

また、AとBが出会うまでの2人の所要時間は等しいので、AとBの速さの比は3：5より、**2人の移動距離の比は3：5**である。

そこで、この池の周りを3+5=8[等分]した点P_0～P_7を右図のように設定する。**作図**



P_0からA、Bが図の矢印の方向にそれぞれ進むとき、AとBの移動距離の比は3：5より、Aが3つ分反時計回りに進み、Bが5つ分時計回りに進むので、2人が出会う場所はP_3であることがわかる。

次はこの点P_3がスタート地点になる。P_3をスタート地点にすると次に出会う場所はP_6であり、P_6をスタート地点にするとその次に出会う場所はP_1であるから、3回目に出会うのはP_1である。したがって、P_1はP_0からAの進行方向に$400\div8=50$ [m]進んだ地点である。

正解　2

4 流水算

1 流水算

川の流れによって、岸から見た船の移動の速さは速くなったり遅くなったりする。一般に、岸から見れば、川下りでは船の移動の速さは速くなり、川上りでは遅くなる。また、動く歩道やエスカレーター上を流れの方向に歩いて進めば、止まっている人から見た移動の速さは速くなる。

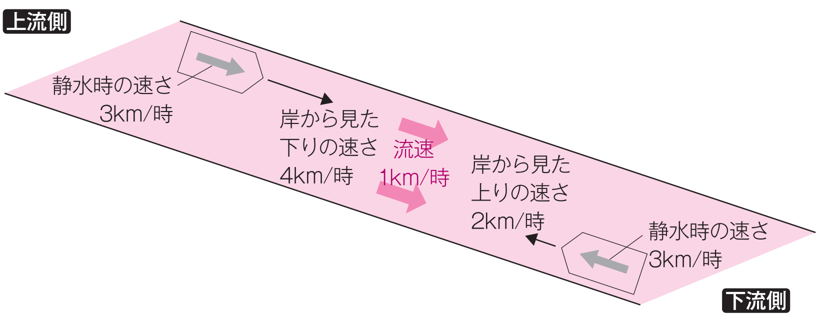
このように、**動くものの上(流れの中)を進む人や船に関する速さの問題を「流水算」**という。

例12　一定の速さで流れる川がある。この川の流速が時速 1 kmであり、静水時の速さが時速 3 kmの船で川を上り・下りするとき、岸から見た船の速さはいくらか。

※　(静水時の速さ)＝(船自身の速さ)である。

静水時の速さが時速 3 kmの船で川を下るときは、川の流れによる流速が加わって、流速分だけ速くなり、岸から見れば、船の移動の速さは3＋1＝4［km/時］で進む。よって、岸から見た下りの船の速さは4［km/時］である。

また、静水時の速さが時速 3 kmの船で川を上るときは、川の流れに戻されて、流速分だけ遅くなり、岸から見れば、船の移動の速さは3－1＝2［km/時］で進む。よって、岸から見た上りの船の速さは2［km/時］である。



2 上り・下りする船の速さ

例12より、次式が成立する。

上り・下りする船の速さ

❶（岸から見た下りの速さ）＝（静水時の速さ）＋（流速）
❷（岸から見た上りの速さ）＝（静水時の速さ）－（流速）

※　流水算では、「岸から見た速さ」を基準と考える。

3 流水算と比の関係

流水算では下りと上りの移動距離が同じと設定されることが多い。このような場合は、所要時間と速さが逆比の関係になる。これを用いて立式することもできる。

例13

静水時の速さが35km/時である船が120km離れた２地点間を結ぶ川を上り下りする場合を考える。１日目の流速が５km/時、２日目の流速が15km/時のとき、下りと上り（２日間の様子）の表から、所要時間の比と速さの比を調べてみる。

	１日目の下り	１日目の上り	２日目の下り	２日目の上り
岸から見た速さ	35＋5＝40 [km/時]	35－5＝30 [km/時]	35＋15＝50 [km/時]	35－15＝20 [km/時]
時間	３時間	４時間	２時間24分	６時間
距離	120km	120km	120km	120km

所要時間の比は、３時間：４時間：２時間24分：６時間＝180分：240分：144分：360分だが、12で割れば、15：20：12：30である。一方、速さの逆比は、$\frac{1}{40}:\frac{1}{30}:\frac{1}{50}:\frac{1}{20}$だが、600倍することで、15：20：12：30となり、所要時間の比と一致する。したがって、確かに、所要時間と速さが逆比の関係になっている。

例題 1-10

A、Bの2地点間を川が流れており、ボートでA地点からB地点まで行くのに50分、B地点からA地点まで行くのに30分かかる。静水時でのボートの速さが毎時20kmであるとき、川の流速として正しいのはどれか。ただし、川の流速は常に一定であるとする。

1. 毎時3km
2. 毎時4km
3. 毎時5km
4. 毎時6km
5. 毎時7km

正解へのプロセス

本問は流れのある川の上を進むボートに関する速さの問題であるので、「**流水算**」の**問題**である。 **テーマの把握**

流水算では、「岸から見た速さ」を基準に考える。 **解法のポイント** **基準**

川の流速をx[km/時]とおくと、(**岸から見た下りの速さ**)＝(**静水時の速さ**)＋(**流速**)、(**岸から見た上りの速さ**)＝(**静水時の速さ**)－(**流速**)より、(岸から見た下りの速さ)＝20＋x[km/時]、(岸から見た上りの速さ)＝20－x[km/時]である。 **目標** **公式**

問題文によると、所要時間が50分、30分とあり、川下りの方が川上りに比べて短時間で到着するため、30分の方が川下り、50分の方が川上りである。

以上より、川下り、川上りの**速さの3要素を表に整理**すると、以下のようになる。 **表**

	川下り	川上り
速さ(は)	20＋x	20－x
時間(じ)	30	50
距離(き)	y	y

移動距離(AB間の距離)が川下りと川上りで一致するので、解答の方針として次の2つが考えられる。

［解法１］　速さの３公式を用いて、連立方程式を立てて解く

移動距離（AB間の距離）＝y［km］とおく。このとき、川下りと川上りで（距離）＝（速さ）×（時間）の等式が２つ立式でき、未知数はxとyの２つあるので、連立方程式でxを求めることができる。

［解法２］　比を用いて解く

川下りと川上りで移動距離が等しく、速さの３要素のうち一致する要素が１つあるので、残りの２要素間に比例式を立てて解くことができる。

つまり、速さと時間は逆比の関係になる。解法のポイント

解説

［解法１］　速さの３公式を用いて解く

流速をx［km/時］、移動距離（AB間の距離）をy［km］とすれば、目標 岸から見たボートの速さは川下りでは$20+x$［km/時］で、川上りでは$20-x$［km/時］である。

30分＝$\frac{30}{60}$時間、50分＝$\frac{50}{60}$時間より、**移動距離について立式**すれば、川下りについて、$y=(20+x)\times\frac{30}{60}$であり、川上りについて、$y=(20-x)\times\frac{50}{60}$である。公式

２式を連立し、yを消去すれば、$(20+x)\times\frac{30}{60}=(20-x)\times\frac{50}{60}$となり、$(20+x)\times3=(20-x)\times5$より、これを解けば$x=5$［km/時］である。

［解法２］　比を用いて解く

流速をx［km/時］とすれば、岸から見たボートの速さは川下りでは$20+x$［km/時］で、川上りでは$20-x$［km/時］である。目標

川下りと川上りの移動距離が等しいため、川下り、川上りの速さの比はそれぞれの所要時間の逆比であるから、解法のポイント 50：30＝５：３である。よって、$(20+x):(20-x)=5:3$が成り立つ。

（外項の積）＝（内項の積）より、$(20+x)\times3=(20-x)\times5$が成り立つので、これを解けば$x=5$［km/時］である。

正解 ③

5 通過算

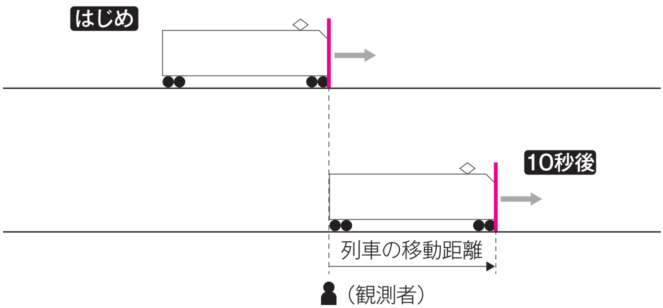
1 通過算

これまでの速さの問題では、移動するものの長さを考慮してこなかった。しかし、列車などの長いものが移動する場合、短時間であれば、移動する物体の長さを考慮する場合がある。

移動するものの長さを考慮に入れた速さの問題を「通過算」という。通過算では**列車**の他に、**自動車**や**行列**などが移動するものとして定番である。**問題の設定や状況を読みながら、移動する物体の長さを考慮すべきか考える**ようにしたい。

例14 時速72kmで走る列車が目の前を通過するのに、10秒かかった。この列車の長さはいくらだろうか。

「列車が目の前を通過する」とは、列車の先頭が目の前を通過し始めてから、列車の最後尾が目の前を通過し終わるまで列車が移動することである。そこで、下図のように、列車の先頭に定点(赤線)を書き込み、「目の前」の位置を破線で表せば、**列車の移動距離は列車の長さに一致する**ことがわかる。



時速72kmの単位を[m/秒]に変換する。72 [km/時]=72×1000÷60÷60=20[m/秒]である。したがって、**(列車の長さ)=(列車の移動距離)**=(列車の速さ)×(時間)=20×10=200 [m]である。

一般に、列車の移動距離を考えるときは、次の図のように先頭の移動距離を調べればよい。このように、**通過算で移動距離を調べる場合は、定点**(列車であれば先頭)**を基準として移動距離を測定**するとよい。

2 ２つの列車のすれ違いと追い抜き

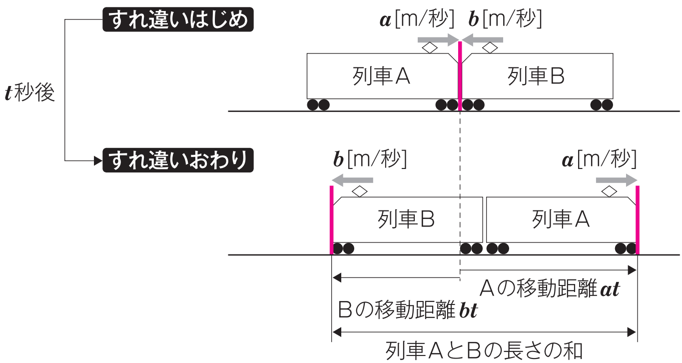
通過算でよく出題される状況として、２つの列車のすれ違いや追い抜きがある。この場合も、２つの列車の先頭の定点の移動に着目して考えていく。ここでは、一般的に考え、２つの列車A、Bの速さをそれぞれ a［m/秒］、b［m/秒］として考える。

① 逆方向に進むとき

ＡとＢがすれ違う(２つの列車が互いに逆向きに進む)とき、列車の長さは無視できないので**通過算**でもあり、互いに逆向きに進むので**出会い算**でもある。

先頭どうしが出会ってから最後尾どうしがすれ違うまでの時間を t［秒］とする。**Ａ、Ｂの先頭に付けた定点(赤線)の移動距離を測定すると、出会い算であるからＡとＢの移動距離の和に着目**すれば、(２つの列車の移動距離の和)＝$at+bt=(a+b)t$［m］となり、これは下図のように、**ＡとＢの長さの和**になる。

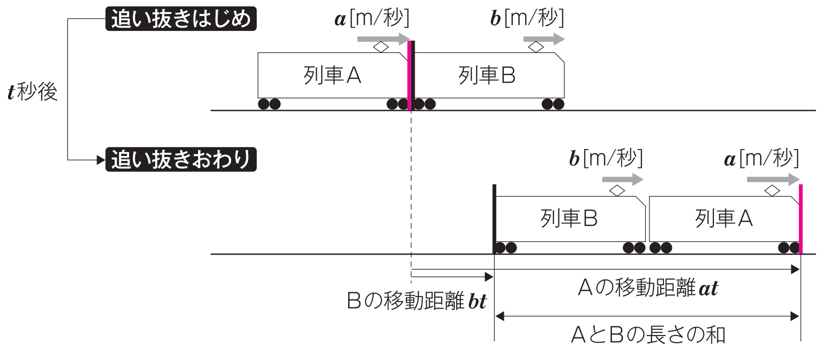
したがって、**$(a+b)t$＝(２つの列車の長さの和)**…①が成り立つ。



② 同じ方向に進むとき

AがBを追い抜く（2つの列車が同じ向きに進む）ときを考える。Aの方がBより速いので、$a>b$が成り立つことに注意したい。この場合も、列車の長さは無視できないので**通過算**でもあり、互いに同じ向きに進むので**追いかけ算**でもある。

Aの先頭とBの最後尾が出会ってからAの最後尾とBの先頭がすれ違うまでの時間をt［秒］とする。**Aの先頭の定点（赤線）と、Bの最後尾に付けた定点（黒線）の移動距離を測定すると、追いかけ算であるからAとBの移動距離の差に着目**すれば、（2つの列車の移動距離の差）$=at-bt=(a-b)t$［m］となり、これは下図のように、**AとBの長さの和**になる[5]。したがって、$(a-b)t=$**（2つの列車の長さの和）**…②が成り立つ。



①、②より、次の公式が成り立つ。

2つの列車のすれ違い・追い抜きの公式

❶【2つの列車のすれ違いの公式】
（2つの列車の速さの和）×（すれ違いに要する時間）＝（2つの列車の長さの和）

❷【2つの列車の追い抜きの公式】
（2つの列車の速さの差）×（追い抜きに要する時間）＝（2つの列車の長さの和）

※　すれ違いの場合は**出会い算**であるから「**速さの和**」が、追い抜きの場合は**追いかけ算**であるから「**速さの差**」が公式の速さの項に現れるが、いずれの場合も、移動距離の項は「**2つの列車の長さの和**」になっていることに注意する。

5 「2つの列車の追い抜き」の場合は、一方の列車の最後尾の定点を測定するとわかり易い。このように、列車の先頭ばかりではなく、最後尾にも定点を付ける場合がある。

例題 1-11 ある列車が360mのトンネルに入り始めてから通過し終わるまでに28秒かかり、216mの鉄橋を渡り始めてから渡り終わるまでに20秒かかった。

(1) この列車の秒速と長さの組合せとして正しいのはどれか。

	秒速	長さ
1	秒速18m	144m
2	秒速18m	156m
3	秒速20m	156m
4	秒速20m	144m
5	秒速24m	144m

(2) この列車が長さ150m、時速86.4kmの列車とすれ違い始めてからすれ違い終わるまでに何秒かかるか。

1 3秒　2 4秒　3 5秒　4 6秒　5 7秒

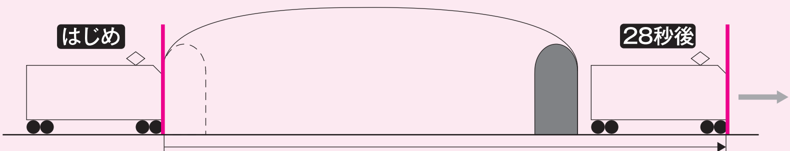
正解へのプロセス

以下に、小問ごとに**問題の読み方と状況把握**を示す。

(1)

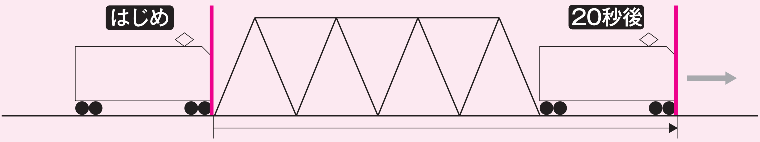
「トンネルに入り始めてから通過し終わる」とは、列車の先頭がトンネルに入り始めてから、列車の最後尾がトンネルを通過し終わる(出終わる)まで移動することである。したがって、**列車の先頭に移動の基準となる定点(赤線)を付けて、移動距離を測定すると**下図のようになることである。**作図** **基準**

列車の長さをx[m]とおくと、 **目標** **先頭に着目**すれば、**解法のポイント** この28秒間の移動距離は$360+x$[m]である。



「鉄橋を渡り始めてから渡り終える」とは、列車の先頭が鉄橋を渡り始めてから、列車の最後尾が鉄橋を通過し終わるまで移動することである。したがって、**列車の先頭に移動の基準となる定点（赤線）を付けて、移動距離を測定する**と下図のようになることである。 **作図** **基準**

先頭に着目すれば、 **解法のポイント** この20秒間の移動距離は216＋x[m]である。



（移動距離）＝（鉄橋）＋（列車の長さ）＝216＋x[m]

(2)

２つの列車が「すれ違い始めてからすれ違い終わるまでに何秒かかるか」を問われている。本編で説明したように、先頭の移動距離を作図して定点観測してもよいが、**公式を使って素早く求められるようにしたい**。 **公式**

解説

(1)

［解法１］　速さの３公式を用いて解く

列車の長さをx［m］、速さをy［m/秒］とおくと、 **目標** 先頭に着目すれば、トンネルを通過する28秒間の移動距離は360＋x［m］である。このとき、**（距離）＝（速さ）×（時間）**より、360＋x＝y×28…①が成り立つ。

先頭に着目すれば、 **解法のポイント** 鉄橋を渡る20秒間の移動距離は216＋x［m］である。このとき、**（距離）＝（速さ）×（時間）**より、216＋x＝y×20…②が成り立つ。

①と②を連立すれば、①－②より、8y＝144となり、y＝18［m/秒］を得る。これを①に代入して、x＝144［m］を得る。

［解法２］　比を用いて解く

列車の長さをx［m］とする。 **目標**

トンネルを通過する際と、鉄橋を渡る際の**速さが等しい**ので、**距離と時間の比が正比の関係**になる。 **解法のポイント** したがって、(360＋x)：(216＋x)＝28：20＝７：５が成り立つ。

(内項の積)＝(外項の積)より、方程式$7\times(216+x)=5\times(360+x)$が成り立つので、整理すると$2x=288$となり、これを解けば、$x=144$［m］を得る。

この結果を用いれば、この列車の速さは、$\dfrac{216+x}{20}=\dfrac{360}{20}=18$［m/秒］である。

正解 1

(2)

時速86.4kmの単位を［m/秒］に変換すると、86.4［km/時］＝86.4×1000÷60÷60＝24［m/秒］である。

すれ違いに要する時間をt［秒］とし、目標 **(2つの列車の速さの和)×(すれ違いに要する時間)＝(2つの列車の長さの和)**を用いれば、公式 $(18+24)\times t=144+150$より、通過時間は$t=\dfrac{294}{42}=7$［秒間］である。

正解 5

6 ダイヤグラム

1 ダイヤグラム

速さの問題では、**タテ軸に位置(距離)、ヨコ軸に時刻(時間)をとったグラフ**を慣例的に「**ダイヤグラム**」と呼んでいる[6]。

これまで、速さの状況把握には道のりの図を使ってきた。速さの３要素である速さ・時間・距離のうち**最も視覚化しやすい距離に着目した作図法が道のりの図**だからである。一方、**ダイヤグラムを用いると距離だけでなく時間や速さも可視化**できる(後述)。したがって、ダイヤグラムを使えば、移動の様子を視覚的に整理して理解でき、動きの複雑な速さの問題や抽象的な速さの問題がわかり易く理解できる。ダイヤグラムは、**状況把握に便利な道具**である。

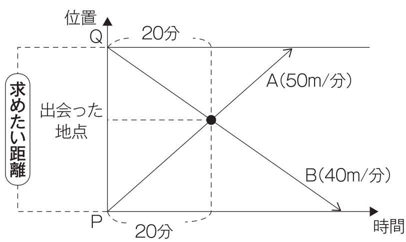
例15

２地点Ｐ、Ｑを結ぶ一本の道路があり、ＡがＰからＱへ向かって、ＢがＱからＰへ向かって、この道路をそれぞれ同時に歩き始めた。Ａは分速50mで、Ｂは分速40mで歩いたところ、２人が出会うまで20分かかった。PQは何mか。

旅人算で考えた 例1 をダイヤグラムを描いて考えてみたい。まず、**縦軸(道のりの図に相当)、横軸(時間軸)を描き**、縦軸にＡとＢを定める。そして、ＡとＢを通り、時間軸に平行に直線を引く(Ｐを縦軸の下におけば、Ｐは横軸そのものになるので、Ｐを通る直線を引く必要はない)。

ＡとＢは一定の速さで進むので、Ａ、Ｂの移動の様子は直線のグラフとして表現できる。また、Ａの方がＢよりも速いので、同時に出発した場合、到着時刻はＡの方が早いことに注意すれば、**直線の傾斜(傾きの大きさ)はＡの方がＢより大きい。**

交点●はＡ、Ｂが同時刻に同位置にいるので「出会い」を表していることに注意すれば、出会うまでにかかった「20分」は図のように書き込める。



PQはＡの移動距離である交点●の高さと交点●からＱを通る横軸に平行な直線までの高さの和になり、旅人算

---

6 厳密には、ダイヤグラム（diagram）とは「図表」を表し、特に列車やバスなどの運行図表のことである。これを由来として、速さの問題に登場する位置（距離）と時刻（時間）の関係を示すグラフのことを、慣例的に「ダイヤグラム」と呼んでいる。

の例9で示したように、Aの移動距離は50×20＝1000［m］、Bの移動距離は40×20＝800［m］であるから、PQ＝1000＋800＝<u>1800［m］</u>である。

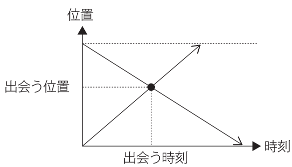
以上より、ダイヤグラムの性質として、次のことが成り立つ。

ダイヤグラムの性質

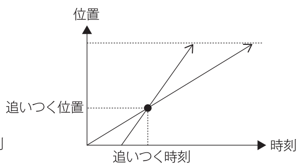
❶ **一定の速さ**で進むとき、移動の様子は**直線のグラフ**として表現できる。
❷ **グラフの交点は同時刻に同位置にいること（出会いや追いつき）**を表す。
❸ **グラフの傾きの大きさは速さを表している**。したがって、**グラフの傾きの大きさが大きいほど速く、小さいほど遅い**。

2 ダイヤグラムの用法

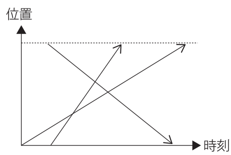
ダイヤグラム上のグラフの交点は同時刻に同位置にいることを表していることから、特に**旅人算で威力を発揮**し、３人以上登場する旅人算、往復を繰り返しながら何回も出会ったり追い越したりする旅人算や、条件として速さの３要素のうち**時間の情報しか与えられていないような旅人算に有効**である。



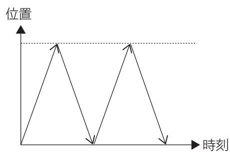
出会い算



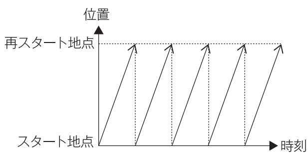
追いかけ算



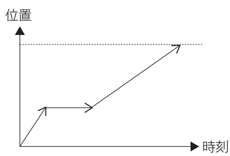
3人登場旅人算



往復運動



周回算



速さが途中で変化

例題 1-12

太郎君は自動車でＰ町からＱ町に向かって、花子さんは自転車でＱ町からＰ町に向かって同時に出発し、一定の速さで同じ道を通った。２人が出会ってから、太郎君は12分後にＱ町へ、花子さんは27分後にＰ町に着いた。このとき、２人が同時に出発してから出会うまでにかかった時間として、正しいのはどれか。

1. 10分
2. 12分
3. 14分
4. 16分
5. 18分

正解へのプロセス

① 問題の読み方

本問は、本文中に「２人が出会ってから」とあるので、「**旅人算(出会い算)**」**の問題**である。 **テーマの把握**

求めるものが「２人が同時に出発してから出会うまでにかかった時間」であるから、太郎君と花子さんが同時に出発してから**出会うまでの時間を** x ［分］とする。 **目標**

次に本問の条件をもとに**速さの３要素を表に整理**する。 **表** 太郎君の速さを u ［km/分］、花子さんの速さを v ［km/分］、Ｐ町から出会う地点までの距離を a ［km］、出会う地点からＱ町までの距離を b ［km］とすれば、次表のようになる。

	太郎君(出会うまで)	花子さん(出会うまで)	太郎君(出会った後)	花子さん(出会った後)
速さ(は)	u［km/分］	v［km/分］	u［km/分］	v［km/分］
時間(じ)	x［分］	x［分］	12分	27分
距離(き)	a［km］	b［km］	b［km］	a［km］

数値がわかっているのは出会った後の太郎君と花子さんの所要時間である12分と27分であり、これでは**未知数(文字)が多過ぎる**。このように、**速さの３要素のうち時間情報のみしか与えられていない旅人算では、文字が多くなる**ことがわかる[7]。このようなときは、ダイヤグラムを描くと簡単に解ける。 **解法のポイント**

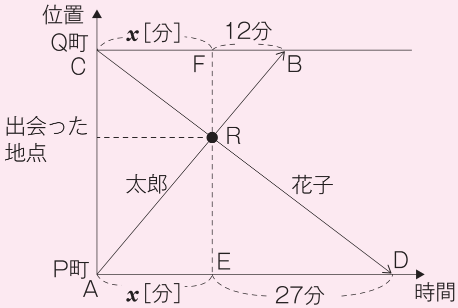
7　例題1-8も「時間情報しかない出会い算」であり、ダイヤグラムを描いて解くことができる。本問を習得後、余力のある読者はダイヤグラムを描いて考えてみてもよいのではないだろうか。

なお、ダイヤグラムを使わず、比を使って解くこともできるので、解説には別解として掲載しておく。

② ダイヤグラムを描く

太郎君と花子さんの**2人の速度は一定であるから、移動を表すグラフは直線**となり、ダイヤグラムを描くと下図のようになる。本編で紹介した例のように描いていけばよい。描く際は、**グラフの傾きの大きさが大きいほど速く、小さいほど遅い**ことに留意しながら、**グラフの交点は出会いを表す**ことに注意する。

解法のポイント **作図**



③ ダイヤグラムを用いた立式

ダイヤグラムで解く場合は、速さの3公式の他に、**グラフ上の図形の相似比を用いて立式する**ことがある。**解法のポイント**

△AERと△BFRが相似であることと、**△DERと△CFRが相似**であることを用いる。相似については第9節で詳しく述べるが、ダイヤグラムでは次の図形に着目してみてもらいたい。

出会い算では、2人の移動を表す2直線に挟まれた**左下と右上および右下と左上の直角三角形が相似**である。

※　現段階では、相似を学んでいないので、ダイヤグラムの問題には別解を付けておく。第9節で相似を学んだあとで、もう一度詳しく読み直してもらいたい。

解説

太郎君と花子さんが同時に出発してから**出会うまでの時間をx[分]とする**。**目標**

このとき、**2人の移動を表すダイヤグラムを描く**と、前述の **正解へのプロセス** のよ

うになる。**作図**

△AERと△BFRが相似であるからER：RF＝x：12…①であり、△DERと△CFRが相似であるからER：RF＝27：x…②である。さらに①と②の左辺は、ER：RFが一致することから、x：12＝27：xが成り立つ。**解法のポイント**

（外項の積）＝（内項の積）より、x^2＝12×27…③となり、これを解けば、x＝18［分］を得る。

※　式③は簡単な２次方程式であるから、解は選択肢を代入し、１つずつ検討してもよい。

［別　解］　比を用いて解く

太郎君と花子さんが同時に出発してから出会うまでの時間をx［分］とする。**目標**

Ｐから２人が出会った地点までの同じ距離を、太郎君はx［分］、花子さんは27分かけて進み、Ｑから２人が出会った地点までの同じ距離を、太郎君は12分、花子さんはx［分］かけて進んでいる。

２人が同じ距離を移動するとき、時間と速さは逆比の関係である。また、２人の速さは一定であるから、２人が出会う前後で２人の速さの比が変わらないことより、（太郎君の速さ）：（花子さんの速さ）＝x：27＝12：xが成り立つ。

（外項の積）＝（内項の積）より、x^2＝27×12となり、これを解けば、x＝18［分］を得る。

正解　5

7 仕事算

1 仕事算

仕事の速さに関する問題で、**全体量の変化しない仕事を処理する問題を「仕事算」**という。

例16　Aさんと B さんが、ある仕事を２人で一緒にすることになった。Aさんはこの仕事を１人だけで３日かけて完了し、Bさんはこの仕事を１人だけで６日かけて完了するという。このとき、２人で一緒に仕事をすると何日で完了することができるか。

仕事算の問題では、**仕事の全体量を１とする**。これは、仕事の定量化であり、私たちが普段から「仕事が半分終わった」などと、**仕事の進み具合を割合（分数）で表現**することからも理解できる。

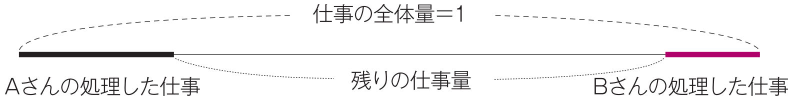
Aさんはこの仕事を１人だけで３日かけて完了するので、１日あたり$\frac{1}{3}$の仕事を行う。速さとは単位時間あたりの変化量であるから、この「１日あたり$\frac{1}{3}$の仕事」はAさんの仕事の速さを表している。Bさんはこの仕事を１人だけで６日かけて完了するので、Bさんの仕事の速さは「１日あたり$\frac{1}{6}$」である。

２人で一緒に仕事をすると、１日あたり$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$の仕事を行う。仕事の全体量が１であり、「１日あたり$\frac{1}{2}$の仕事を行う」ということは、$1\div\frac{1}{2}=\underline{2}$ <u>[日]</u>で完了することがわかる[8]。

8　当たり前だが、仕事を２人で行えば、仕事の所要日数は１人で行うときに比べて短縮する。２人で仕事を行うからといって、２人の仕事の所要日数を3+6=9［日］と単純に足してはいけない。

2 仕事算の公式

例16からもわかるように、**仕事算は割合の一種**であると考えることもできる。そこで、２人で仕事をするときは、**線分図を描いて考える**とわかりやすい。



上図からもわかるように、仕事算は次のように立式するとよい。

仕事算の公式

❶ **(仕事の全体量)を１**とすれば、仕事の速さが一定のとき、

$$(\text{仕事の速さ}) = \frac{1}{(\text{仕事を終えるのにかかる時間})}$$

が成り立つ。

❷ **(仕事の全体量)−(各人の全日程で処理した仕事の和)＝(残りの仕事量)**
　特に、**仕事を完遂するとき、(残りの仕事量)は０になり、**
(各人の全日程での仕事の和)＝(仕事の全体量)＝１
である。

※１　仕事の速さを考えるとき、「１時間あたり」か「１日あたり」かなどの、速さの単位に気をつけなくてはならない。
※２　❷式は「旅人算の公式」(はじめの２人の距離)−(縮まった距離)＝(おわりの２人の距離)と同型であり、線分図上の２人の進行方向が逆向きであることから、**仕事算は出会い算の一種**とも捉えることができる。

例題 1-13 ある仕事を仕上げるのに長崎君１人で15日かかり、佐賀君１人で10日かかる。この仕事を２人で一緒に行うことにしたが、途中で佐賀君が病気で５日休んだ。この仕事が完成するのにかかった日数として、正しいのはどれか。

1. ７日
2. ８日
3. ９日
4. 10日
5. 11日

正解へのプロセス

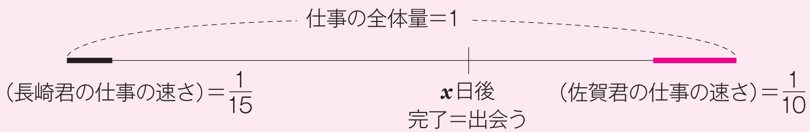
まずは仕事の全体量を１とする。**基準**

そして、各人の仕事の速さを割合(分数)で表す。**解法のポイント**

この仕事を終えるのに、長崎君は１人で15日かかり、佐賀君は１人で10日かかるので、彼らの１日あたりの仕事の速さは、長崎君、佐賀君それぞれ$\frac{1}{15}$、$\frac{1}{10}$である。**公式**

このとき、この**仕事の完成日数をx[日]とすれば、** **目標** 長崎君はこのx[日]の間休まず仕事を行うが、佐賀君は５日休んだため、佐賀君の仕事の実働日数は$x-5$[日]である。

このとき、完了までの間で進む２人の仕事の進み具合を**線分図に表せば**次のようになる。**解法のポイント** **作図**



仕事算における(各人の仕事の進み具合)＝(線分の長さ)が速さの３要素における距離に対応する。そこで、長崎君、佐賀君の２人の速さの３要素を表に整理すると、下表のようになり、**要素に一致するものがない**ことがわかる。したがって、本問は**比を用いて解くことはできない。**

	長崎君	佐賀君
速さ(は)	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$
時間(じ)	x[日]	$x-5$[日]
距離(き)	$\frac{1}{15}x$	$\frac{1}{10}(x-5)$

仕事算は、割合の一種であるが、出会い算でもあるので、距離の和である「2人の線分の長さ(仕事の進み具合)の和」に着目して立式すればよい。結果的には、仕事算の公式の❷を用いることと同じである。 公式

解説

この仕事の完成日数をx[日]とする。 目標

問題の条件で仕事を行うとき、長崎君はx[日]仕事を行うが、佐賀君は5日休んだため、佐賀君の仕事の実働日数は$x-5$[日]である。仕事算の公式の❷である(各人の全日程での仕事の和)＝(仕事の全体量)＝1より、 公式

$$\frac{1}{15}x+\frac{1}{10}(x-5)=1$$

が成り立つ。

これを解けば、$x=9$[日]である。

正解 ③

8 ニュートン算

1 ニュートン算

仕事や処理の速さに関する問題で、**全体量が変化する場合の仕事や処理の問題**を「**ニュートン算**」という。ニュートン算では仕事に限らず、様々な量が登場する。

例17　ある牧草地に草が360本生えている。この牧草地に草を食べる牛を３頭入れると12日で草がなくなり、牛を４頭入れると８日で草がなくなる。この牧草地に牛を５頭入れると草は何日でなくなるか。ただし、草は一定の割合で生え、どの牛も１日に食べる草の量は一定であるものとする[9]。

草が１日で生える量をx［本］、牛１頭が１日で食べる草の量をy［本］とする。

３頭の牛が12日間で食べた草の量は$y\times3\times12=36y$［本］であり、これははじめに生えていた360本と、新たに生えてきた$x\times12$［本］を合わせた$360+12x$［本］に一致する。したがって、$360+12x=36y$…①が成り立つ。

同様に、４頭の牛が８日間で食べた草の量は$y\times4\times8=32y$［本］であり、これははじめに生えていた360本に、新たに生えてきた$x\times8$［本］を合わせた$360+8x$［本］に一致するので、$360+8x=32y$…②が成り立つ。

①と②を連立すれば、$x=15$［本］、$y=15$［本］となる。５頭の牛に草が食べ尽くされる日数をt［日］とおけば、５頭の牛がt［日］で食べた草の量は$15\times5\times t=75t$［本］であり、これははじめに生えていた360本に、新たに生えてきた$15\times t=15t$［本］を合わせた$360+15t$［本］に一致する。よって、$360+15t=75t$…③となり、$t=$6［日］である。

①、②、③は次のように考えてもよい。

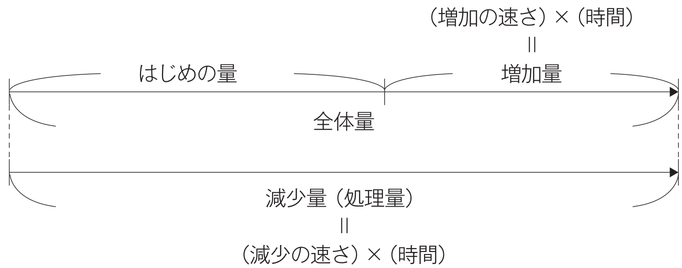
（はじめに生えていた草）＋（新たに生えてきた草）－（牛が食べた草）
＝（残っている草）

と考えれば、食べ尽くされてしまえば、**（残っている草）＝0**なので、①は$360+12x-36y=0$、②は$360+8x-32y=0$、③は$360+15t-75t=0$である。つまり、**（はじめの量）＋（増加の速さ）×（時間）－（減少の速さ）×（時間）＝（おわりの量）**で立式すればよい。

9　牧草と牛の問題は、物理学者ニュートンの著書に出てきた問題例であり，「ニュートン算」という呼び名はこのことに由来する。

2 ニュートン算の公式

上の例17からもわかるように、ニュートン算では次式が成り立つ。覚えるというより次の図をイメージをしながら理解したい。



ニュートン算の公式

（はじめの量）＋（増加の速さ）×（時間）－（減少の速さ）×（時間）＝（おわりの量）

特に、**処理が終了するときは**、（おわりの量）＝０であり、

（はじめの量）＋（増加の速さ）×（時間）－（減少の速さ）×（時間）＝0

が成り立つ。

※１　（増加の速さ）および（減少の速さ）は単位時間あたりの量である。

※２　例17の後半で取り上げた考え方によれば、上の公式は**（はじめの量）－{（減少の速さ）－（増加の速さ）}×（時間）＝（おわりの量）**となる。これは、「旅人算の公式」（はじめの２人の距離）－（縮まった距離）＝（おわりの２人の距離）と同型であり、線分図上では、増加と減少（処理）の進む方向（矢印）が互いに同じ向きであることから、**ニュートン算は追いかけ算の一種**と捉えることができる。

例題 1-14 ある遊園地では、開園前に行列が300人以上できた場合には、時間を繰り上げて開園することにしている。その日は開園前から入園希望者が毎分20人の割合で並び始めたので、開園前に行列が300人となり、その時点で開園した。開園後も同様の割合で行列に加わる者が続いたが、入場口を１つだけ開けたところ、15分で行列が解消した。入場口を２つ開けて開園していたとき、行列が解消する時間として、正しいのはどれか。

1. ３分
2. ５分
3. ７分
4. ９分
5. 11分

正解へのプロセス

本問は、入り口に滞った人を入場口が捌く**処理の速さの問題**であり、入り口には時々刻々人が流れ込むため、**全体量が増加する**ことがわかる。したがって、**本問は**「**ニュートン算**」**の問題**である。 **テーマの把握**

ニュートン算では公式を使って立式していけばよい。 **解法のポイント**

本問は「行列が解消する」ことから、処理が終了するので、

（はじめの量）＋（増加の速さ）×（時間）－（減少の速さ）×（時間）＝0

を用いる。 **公式**

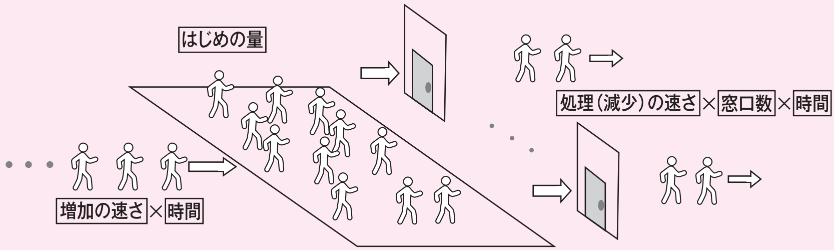
そこで、ニュートン算の公式に対応する量を問題文を読みながら確認していく。

「その日は開園前から入園希望者が毎分20人の割合で並び始めた」より、**（増加の速さ）＝20［人/分］**である。「開園前に行列が300人となり、その時点で開園した」より、「その時点」がこの問題の処理のスタート（「はじめ」）になるので、**（はじめの量）＝300［人］**である。「入場口を１つだけ開けたところ」、「入場口を２つ開けて」とあるので、**入場口が「処理」を行っており、入場口が複数ある**。このように、**処理するものが複数あるときは、１つあたりで処理できる量を考える**と立式がうまくいく。つまり、（入場口**１つあたりの**処理（減少）の速さ）＝x［人/分］とおけば、「入場口を１つだけ開けたところ」の**（処理（減少）の速さ）＝x［人/分］**であり、**２つ開けると２倍の速さで処理できる**ことより、「入場口を２つ開けて開園していたとき」の**（処理（減少）の速さ）＝2x［人/分］**と表せる。

そして、「**入場口を２つ開けて開園していたとき、行列が解消する時間**」＝t［分］

とおく。目標

次に、状況把握のために、問題文の様子を図に描けば、次のようになる。作図



未知数はxとtの２つあり、「入場口を１つだけ開けたところ、15分で行列が解消した」、「入場口を２つ開けて開園していたとき、行列が解消する時間（＝t［分］）として、正しいのはどれか」と条件が２つあるので、公式を２式立てて連立する。なお、公式１つ目では（時間）＝15［分］、公式２つ目では（時間）＝t［分］である。

公式

このように、ニュートン算では原則的に未知数について文字を複数おき、条件の数だけニュートン算の公式を立て、連立方程式を解いていけばよい。

解説

300人並んでから毎分20人ずつ増えている状態で入場口を１つ開けたとき、行列が15分で解消したので、入場口１つに１分あたりに入場できる人数をx［人/分］とすれば、

（はじめの量）＋（増加の速さ）×（時間）－（減少の速さ）×（時間）＝0

より、公式 $300+20\times15-x\times15=0$が成り立つ。これを解けば、$x=40$［人］である。つまり、入場口１つに１分あたりに入場できる人数は40人である。

この入場口を２つ開けると２倍の速さ（１分あたり40×2＝80［人］）で処理できる。これに気を付けて、行列が解消する時間をt［分］とおけば、目標 ニュートン算の公式より、$300+20\times t-(40\times2)\times t=0$が成り立つ。これを解けば、$t=5$［分］である。つまり、300人の行列は入場口を２つ開けると５分で解消する。

正解 2

過去問Exercise

問題1

　あるランナーは、通常、平坦な道24kmを２時間40分で走る。このランナーが、ある山の頂上から麓まで12kmの道のりを下り、折り返して頂上まで12kmの道のりを上る全長24kmのコースを走った。下りの平均速度は通常の速度（平坦な道での平均速度）より６km/h速く、上りの平均速度は通常の速度より６km/h遅かった。このコースを完走するのに要した時間はいくらか。

国家専門職2010

1. ２時間08分
2. ２時間24分
3. ２時間40分
4. ３時間45分
5. ４時間48分

解説

正解 5

「速さ」の問題である。 テーマの把握

特に本問では、速さの３公式や単位換算を見ていきたい。 公式 解法のポイント

下り、上りで速さが異なるので、かかった時間も分けて求めなければならない。そこで、まずは通常の速度を求める。

24kmの道のりを２時間40分$=2+\frac{1}{60}\times40$［時間］$=\frac{8}{3}$［時間］で走るので、（速さ）＝（距離）÷（時間）より$24\div\frac{8}{3}=9$［km/h］である。これをもとに、下りの所要時間、上りの所要時間をそれぞれ求める。

下りに進んだ距離は12kmで、下りの平均速度は$9+6=15$［km/h］であるので、下りの所要時間は（時間）＝（距離）÷（速さ）より$12\div15=\frac{12}{15}$［時間］$=\frac{4}{5}$［時間］である。

上りに進んだ距離は12kmで、上りの平均速度は$9-6=3$［km/h］であるので、上りの所要時間は（時間）＝（距離）÷（速さ）より$12\div3=4$［時間］である。

よって、完走するのに要した時間は、（下りの所要時間）＋（上りの所要時間）＝$\frac{4}{5}+4$［時間］$=4$［時間］$+60\times\frac{4}{5}$［分］＝４時間48分である。

問題2

5km離れた2地点A、B間を同じ経路で、兄はオートバイで、弟は自転車でそれぞれ走って一往復することになり、13時に弟が地点Aを出発した。その32分後に兄が地点Aを出発し、地点Bの手前1kmの地点で弟を追い越した。その後、復路を走る兄が弟とすれ違う時刻として、正しいのはどれか。ただし、兄弟が走る速さはそれぞれ一定であり、兄は弟の3倍の速さで走った。

東京都Ⅰ類2011

1. 13時44分
2. 13時54分
3. 14時04分
4. 14時14分
5. 14時24分

解説

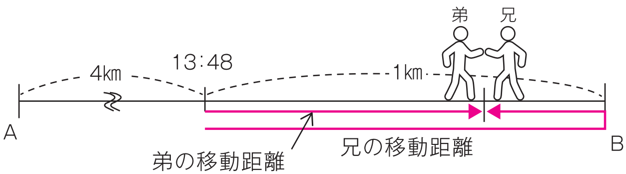
正解 ②

「旅人算」の問題である。 **テーマの把握**

「兄は弟の３倍の速さで走った」とあるので、**兄の速さ：弟の速さ＝３：１**として、比を用いて解く。 **解法のポイント**

まず、地点Ｂの手前１kmの地点の兄と弟の通過時刻を求める。そこで、**この地点までの兄の所要時間をx［分］とおく**。 **目標** このとき、弟の所要時間は$x+32$［分］であり、移動距離は兄、弟ともに$5-1=4$［km］である。**移動距離（＝４km）が一致**しているので、速さと時間が逆比の関係になる。 **解法のポイント**

兄の速さ：弟の速さ＝３：１より、兄が弟を追い越した４km進んだ地点までの所要時間の比は、速さの逆比であり、兄の所要時間：弟の所要時間＝１：３が成り立つ。したがって、$x:(x+32)=1:3$である。**（外項の積）＝（内項の積）**より、$x\times3=(x+32)\times1$より$x=16$［分］である。ゆえに、13時32分の16分後の13時48分に兄は弟に追いつく。ここまでを線分図に描くと、下のようになる。 **作図**



兄は４km＝4000mを$x=16$［分］で走っているので、兄の速さは$\frac{4000}{16}=250$［m/分］となる。弟の速さはこの$\frac{1}{3}$倍であるから$\frac{250}{3}$［m/分］である。 **具体化**

兄が弟を13時48分に追い越してからすれ違うまでにy［分］かかったとする。 **目標**
兄と弟の移動距離の和に着目すると、図より、２人の移動距離の和が１kmの往復分の２km＝2000mに相当する。 **解法のポイント**

（２人の移動距離の和）$=250\times y+\frac{250}{3}\times y=2000$［m］となり、これを解けば、$y=6$［分］である。

よって、復路を走る兄が弟とすれ違う時刻は13時48分の６分後の13時54分である。

問題3

A、B２台の自動車が、１周５kmのコースを同一地点から同じ向きに同時に走り出すと、Aは15分ごとにBを追い越し、逆向きに同時に走り出すと、AとBは３分ごとにすれ違う。このとき、Aの速さはどれか。

特別区Ⅰ類2005

1. 0.8km/分
2. 0.9km/分
3. 1.0km/分
4. 1.1km/分
5. 1.2km/分

解説

正解 ③

「周回算」の問題である。 テーマの把握

AとBの速さをそれぞれx［km/分］、 目標 y［km/分］とする。

AとBが同じ向きに同時に走り出すと、Aは15分ごとにBを追い越すので、Aの方がBより速く$x>y$であり、（2人の速さの差）×（追い抜きの周期）＝（周の長さ）より、 公式 $(x-y)\times 15=5$…①が成り立つ。

AとBが逆向きに同時に走り出すと、AとBは3分ごとにすれ違うので、（2人の速さの和）×（すれ違いの周期）＝（周の長さ）より、 公式 $(x+y)\times 3=5$…②が成り立つ。

①の両辺を5で割って整理すれば、結局、次の連立方程式を解けばよいことがわかる。

$$3x-3y=1$$
$$3x+3y=5$$

求めたいのはxであるから、2式を足して、$6x=6$を得る。よって、$x=1.0$［km/分］である。

問題4

ある川に沿って、20km離れた上流と下流の２地点間を往復する船がある。今、上流を出発した船が、川を下る途中でエンジンが停止し、そのまま24分間川を流された後、再びエンジンが動き出した。この船が川を往復するのに、下りに１時間、上りに１時間を要したとき、川の流れる速さはどれか。ただし、静水時における船の速さは一定とする。

特別区Ⅰ類2014

1. 5 km/時
2. 6 km/時
3. 7 km/時
4. 8 km/時
5. 9 km/時

解説

正解 1

「流水算」の問題である。 **テーマの把握**

下りでは、途中でエンジンが停止してしまったため**船自身の速度が変化**している。**速度が一定でない限り、「速さと時間が逆比」という関係を単純に使うことはできない**。したがって、下りと上りで速さの３公式から２式を立てて、連立方程式で解けばよい。

下りと上りの距離が「20km」と問題に与えられていることに着目すれば、**距離について**式を立てるとよい、と考えたい。

まずは、静水時での船の速度をx［km/時］、川の流速をy［km/時］とおく。**目標**

下りは、船自身の速度が変化しているので、それぞれにかかった時間を考えると、エンジンが停止している時間は24分$=\dfrac{1}{60}\times 24$時間$=\dfrac{2}{5}$時間で、この間は**（岸から見た下りの速さ）＝（静水時の速さ）＋（流速）**$=0+y=y$［km/時］で移動する。**公式**

エンジンが動いている時間は$1-\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}$［時間］で、**（岸から見た下りの速さ）＝（静水時の速さ）＋（流速）**$=x+y$［km/時］で移動する。**公式**

このとき、下りの距離は$y\times\dfrac{2}{5}+(x+y)\times\dfrac{3}{5}$［km］と表せ、この値が「20km」であるので、次の式が成り立つ。

$$y\times\frac{2}{5}+(x+y)\times\frac{3}{5}=20\cdots①$$

一方、上りについては、**（岸から見た上りの速さ）＝（静水時の速さ）－（流速）**$=x-y$［km/時］で移動する。**公式**

このとき、上りの距離についても下りの距離と同様に次式が成り立つ。

$$(x-y)\times 1=20\cdots②$$

①の両辺に５を掛けると、$2y+3(x+y)=100$より、$3x+5y=100\cdots③$である。②より$x=20+y$となり、③に代入すると、$y=5$［km/時］である。

問題5

直線の道路を走行中の長さ18mのトラックを、トラックと同一方向に走行中の長さ2mのオートバイと長さ5mの自動車が、追い付いてから完全に追い抜くまでに、それぞれ$\frac{8}{3}$秒と$\frac{46}{5}$秒かかった。オートバイの速さが自動車の速さの1.4倍であるとき、オートバイの時速として、正しいのはどれか。ただし、トラック、オートバイ、自動車のそれぞれの速さは、走行中に変化しないものとする。

東京都Ⅰ類2020

1. 45km/時
2. 54km/時
3. 63km/時
4. 72km/時
5. 81km/時

解説

正解 3

「長さ18mのトラック」、「長さ2mのオートバイ」、「長さ5mの自動車」とあるので、**移動する物体の長さを考慮に入れる速さの問題である**ことがわかり、「**通過算**」**の問題**であることがわかる。

さらに、「トラックと**同一方向に**走行中の長さ2mのオートバイと長さ5mの自動車が、**追い付いてから完全に追い抜くまでに**、それぞれ$\frac{8}{3}$秒と$\frac{46}{5}$秒かかった」とあるので、「**2つの列車の追い越し**」**の問題**であることがわかる。 **テーマの把握**

「**2つの列車の追い越し**」の問題では公式、

（2つの列車の速さの差）×（追い抜きに要する時間）＝（2つの列車の長さの和）

を利用して解くとよい。 **公式**

自動車の速さをx［m/秒］、トラックの速さをy［m/秒］とおくと、オートバイの速さは$1.4x$［m/秒］とおける。 **目標**

長さ18mのトラックを長さ2mのオートバイが完全に追い抜くまでに$\frac{8}{3}$秒かかったので、**公式より**、$(1.4x-y)\times\frac{8}{3}=18+2$…①が成り立つ。

同様に、長さ18mのトラックを長さ5mの自動車が完全に追い抜くまでに$\frac{46}{5}$秒かかったので、**公式より**、$(x-y)\times\frac{46}{5}=18+5$…②が成り立つ。

①を変形すると$1.4x-y=20\div\frac{8}{3}=\frac{15}{2}$…③、②を変形すると$x-y=23\div\frac{46}{5}=\frac{5}{2}$…④となる。③－④より、$0.4x=\frac{10}{2}=5$より、$x=\frac{5}{0.4}=\frac{50}{4}=\frac{25}{2}=12.5$［m/秒］で、オートバイの速さは$1.4x=1.4\times12.5=17.5$［m/秒］である。

単位変換をすれば、17.5［m/秒］＝$17.5\times60\times60\div1000=63$［km/時］であるから、オートバイの時速は、63km/時である。

問題6

X区役所とY区役所を結ぶ道がある。この道路を、Aは徒歩でX区役所からY区役所へ向かい、BはAの出発の10分後に自転車でY区役所を出発してX区役所へと向かった。2人が出会った時点から、Aは25分後にY区役所に到着し、Bは8分後にX区役所に到着した。2人が出会ったのは、AがX区役所を出発した時点から何分後か。ただし、2人の速度は一定とする。

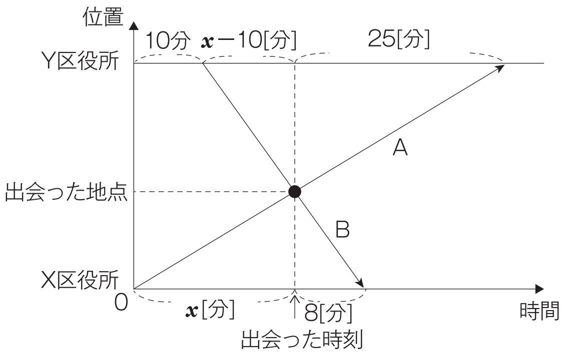
特別区Ⅰ類2011

1. 15分後
2. 20分後
3. 25分後
4. 30分後
5. 35分後

解説

正解 2

　時間情報しか与えられていない「旅人算」の問題であるから、ダイヤグラムを描いて考えていく。 テーマの把握 作図



　AがX区役所を出発してBと出会うまでの時間をx［分後］とする。 目標

　2人の速度は一定であるから、**AとBの移動を表すグラフは直線**となり、2人の出発時刻が異なることに注意すれば、この問題のダイヤグラムは上図のようになる。BはAの出発の10分後に自転車でY区役所を出発してX区役所へと向かったので、BはAと出会うまでに$x-10$［分］かかることになる。

　出会い算では、2人の移動を表す2直線に挟まれた**左下と右上および右下と左上の直角三角形が相似**であることから、**相似比を考える**ことで、次の比例関係を得る。 解法のポイント

$$x:25=8:(x-10)$$

（外項の積）＝（内項の積）より、2次方程式$x\times(x-10)=25\times8$…① となり、展開して整理すれば、$x^2-10x-200=0$となり、$(x-20)(x+10)=0$と因数分解できる。これを解けば、$x=20$、-10である。xは時間であるから正であり、$x=20$［分後］である。

　したがって、2人が出会ったのはAがX区役所を出発した時点から20分後である。

※　2次方程式について詳しくは巻末の付録を参照されたいが、2次方程式①を展開や因数分解できなくても、選択肢を①に代入し、1つずつ検討すれば、正

解を見つけ出すことはできる。

［別　解］　比を用いて解く

Aが X 区役所を出発してからx分後に２人が出会うとすると、X 区役所から２人が出会った地点までの同じ距離を、A はx分間、B は８分間かけて進み、Y 区役所から２人が出会った地点までの同じ距離を、A は25分間、B は$x-10$［分間］かけて進んでいる。

２人が同じ距離を移動するとき、時間と速さは逆比の関係になる。

解法のポイント

また、２人の速さは一定であるから、出会う前後で２人の速さの比が変わらないことより、(A の速さ)：(B の速さ)＝8：x＝(x−10)：25となり、これを解けば、x＝20［分後］である。

問題7

ある作業をA、B、Cの３名で行う。１日に行う仕事量の割合がA：B：C＝３：３：２であり、３名が休まずに仕事をすると30日で終了することがわかっている。今、作業の終了までにAが５日、Bが３日、Cが４日休むとき、この作業に要する日数はどれか。

特別区Ⅰ類2011

1. 33日
2. 34日
3. 35日
4. 36日
5. 37日

解説

正解 2

全体量の変化しない仕事を処理する問題であるから、本問は「仕事算」の問題である。テーマの把握

仕事の全体量を1とする。解法のポイント

1日に行う仕事量の割合がA：B：C＝3：3：2であるから、

$$\begin{cases} 1\text{日に行うAの仕事の割合}=3\boldsymbol{k} \\ 1\text{日に行うBの仕事の割合}=3\boldsymbol{k} \\ 1\text{日に行うCの仕事の割合}=2\boldsymbol{k} \end{cases}$$

とおく。具体化

実際に仕事を終えるのに要する日数をx［日］とすれば、目標 作業の終了までにAが5日、Bが3日、Cが4日休むので、A、B、Cの実働日数はそれぞれ$x-5$［日］、$x-3$［日］、$x-4$［日］である。この実働日数で、全体量1の仕事を終える。

(Aの仕事量)$=3k\times(x-5)=\dfrac{1}{80}(x-5)$、(Bの仕事量)$=3k\times(x-3)=\dfrac{1}{80}(x-3)$、(Cの仕事量)$=2k\times(x-4)=\dfrac{1}{120}(x-4)$であり、(各人の全日程での仕事の和)＝(仕事の全体量)＝1より、公式 (Aの仕事量)＋(Bの仕事量)＋(Cの仕事量)＝(仕事の全体量)＝1であるから、次式が成り立つ。

$$3\times\frac{1}{240}(x-5)+3\times\frac{1}{240}(x-3)+2\times\frac{1}{240}(x-4)=1$$

これを解けば、$x=34$［日］である。

問題8

　ある施設に設置されたタンクには、常に一定の割合で地下水が流入しており、このタンクにポンプを設置して排水すると、3台同時に使用したときは21分、4台同時に使用したときは15分でそれぞれタンクが空となる。この場合、このタンクを7分で空にするために必要なポンプの台数として、正しいのはどれか。ただし、排水開始前にタンクに入っていた水量はいずれも等しく、ポンプの毎分の排水量はすべて等しくかつ一定である。

東京都Ⅰ類2011

1. 6台
2. 7台
3. 8台
4. 9台
5. 10台

解説

正解 3

「ポンプで排水する」という処理の速さの問題であり、「タンクには、常に一定の割合で地下水が流入」とあるので、仕事の全体量が増加する問題である。したがって、本問は「ニュートン算」の問題である。 **テーマの把握**

ニュートン算では原則的に**未知数について文字を複数おき、条件の数だけニュートン算の公式を立て、連立方程式を解いていけばよい**ので、問題文を読みながら、未知数に対し、必要な文字を設定していく。まずは、**ニュートン算の公式**、

(はじめの量)＋(増加の速さ)×(時間)－(減少の速さ)×(時間)＝(おわりの量)

を確認しておく。 **公式**

本問では、**最終的に「タンクを空にする」という条件しか出てこない**ので、**(おわりの量)＝0**としてよい。(はじめの量) は「排水開始前にタンクに入っていた水量」が対応する。(増加の速さ) は「常に一定の割合で流入する地下水」が対応する。また、本問は、ポンプが排水という「処理」を行っており、ポンプが複数台あるので、**ポンプ1台あたりが1分間に排水する量を考える**と立式がうまくいく。このとき、(減少の速さ)＝(ポンプ1台あたりが1分間に排水する量)×(台数) である。

解法のポイント

そこで、排水前にタンクに入っていた水量を$\boldsymbol{a}$、1分間に流入する地下水の量を$\boldsymbol{x}$、1台のポンプで1分間に排水する量を$\boldsymbol{y}$とおく[10]。

まず、「ポンプを3台同時に使用したときは21分でタンクが空になる」ので、**(減少の速さ)＝$\boldsymbol{y}$×3**であり、**ニュートン算の公式より**、次の式が成り立つ。

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}\times21-(\boldsymbol{y}\times3)\times21=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a}+21\boldsymbol{x}=63\boldsymbol{y}\cdots①$$

次に、「ポンプを4台同時に使用したときは15分でタンクが空になる」ので、**(減少の速さ)＝$\boldsymbol{y}$×4**であり、**ニュートン算の公式より**、次の式が成り立つ。

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}\times15-(\boldsymbol{y}\times4)\times15=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a}+15\boldsymbol{x}=60\boldsymbol{y}\cdots②$$

さらに、「タンクを7分で空にする」ために必要なポンプの台数を$\boldsymbol{n}$［台］とおくと、 **目標** **(減少の速さ)＝$\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{n}$**であり、**ニュートン算の公式より**、次の式が成り立つ。

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}\times7-(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{n})\times7=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a}+7\boldsymbol{x}=7\boldsymbol{n}\boldsymbol{y}\cdots③$$

①、②、③は未知数$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{n}$の**連立方程式**である。

---

10 水の量の単位［L］は問題に記載がなかったので、解説でも付けなかったが、［L］を付けても一般性は失わない。一般に、単位は付けた方が具体的であるので、理解の助けになるならば、［L］を付けてもよい。

これを解くために、①−②を計算すれば、$\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{x}$…④が得られ、④を①に代入すると、$\boldsymbol{a}=105\boldsymbol{x}$…⑤となる。これら④と⑤を③に代入すると、次の式が得られる。

$105\boldsymbol{x}+7\boldsymbol{x}=7\boldsymbol{n}\times2\boldsymbol{x}$…⑥

$\boldsymbol{x}\neq0$より、⑥の両辺を$\boldsymbol{x}$で割ると、$105+7=14\boldsymbol{n}$となり、$\boldsymbol{n}$について解くと、$\boldsymbol{n}=8$［台］である。

※　厳密にいえば、①、②、③は式が３つに対し、未知数が４つあるので、連立**不定**方程式である。したがって、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$の値は不定であり、具体的には求められない。

Ｖテキスト 数的処理（上）数的推理・判断推理（体験用）

2022年３月10日　初版第１刷発行（過去問攻略Ｖテキスト第２版の抜粋版）

編　　者　ＴＡＣ公務員講座
発行者　多田敏男
発行所　ＴＡＣ株式会社
〒101-0061
東京都千代田区神田三崎町3-2-18
ＴＡＣ本社ビル
印刷・製本　株式会社　ワコープラネット