

CFA 試験のための数学基礎

目 次

1. 損益がちょうどゼロの状態	2
2. 統計と確率	16
3. 確率分布を使った分析	22
4. サンプルデータ	31
5. 2つのバラツキ	33
6. 平均	45

1. 損益がちょうどゼロの状態

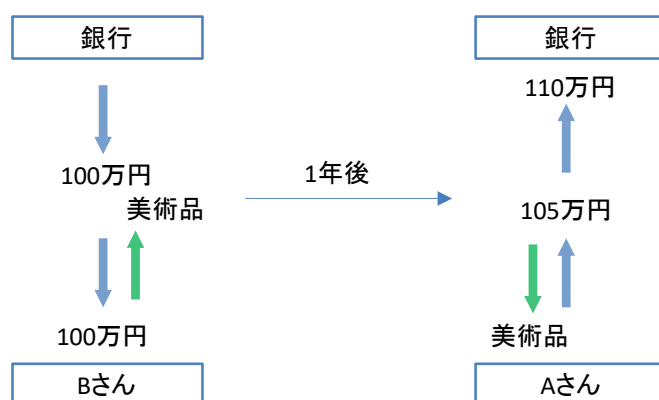
問

A さん（必ず約束を守る人）が、ある美術品を「今ではなく 1 年後」に「105 万円」で買いたいといっている（1 年後に確実にこの価格で売買が成立する前提）。

一方、その美術品を所有している B さんは、美術品を「100 万円」で売ってもいいけれども、売るとしたら 1 年後ではなく「今」といっている。

今、B さんからその美術品を購入して 1 年後 A さんに売ること得をするであろうか（売るまでの間、美術品の保管コストはゼロであり、美術品を活用して収益を稼ぐこともできないとする）。なお、自分の手元に美術品を購入する資金はまったくないが、銀行から 1 年間金利 10% で 100 万円借りることができる（10% は確実に返済される前提で設定された金利）。

解答：5 万円損する。



1 年後、100 万円に利息（100 万円×10%＝10 万円）を加えた 110 万円を返済する。
美術品を A さんに売却することで得られる収益は 105 万円。したがって、1 年後 A
さんに売るために、今、B さんからその美術品を購入して 1 年間保管しておくで 5 万
円損する（105 万円－110 万円＝－5 万円）。

問

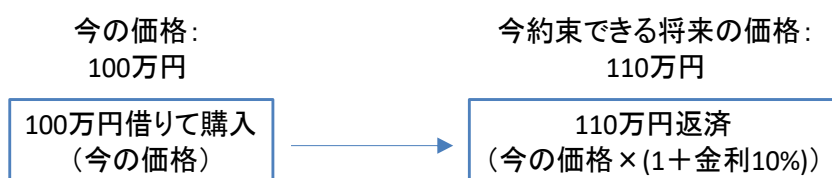
A さんがいくらで買い取ってくれるのであれば、損得ゼロになるか。

解答：110 万円

$$100 \text{ 万円} \times 1.1 = 110 \text{ 万円}$$

A さんが 1 年後に 110 万円で買い取ってくれるのであれば、損得ゼロになる。

美術品の現物を今買い取って、「1 年後の売却価格を今決定」するとき、その売買によるリターンが、金利と同水準であるとき、損得ゼロになる。



問

A さん（必ず約束を守る人）が、ある証券を「今ではなく 1 年後に買いたい」というている。また、「売買の価格は 1 年後ではなく今約束してほしい」というている。その証券は日々、証券市場で売買されており、価格も大きく変動している。

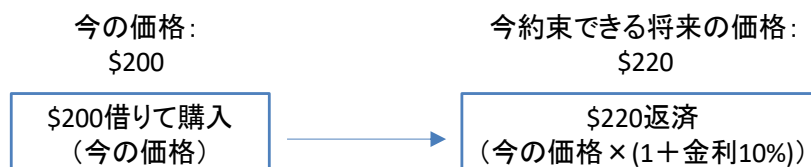
以下の前提において、A さんにどのような価格を提示すれば、損得ゼロになるか。

- 今、その証券を\$200 で買うことができる。専門家によれば、1 年後の証券の価格は\$300 程度との予想であるが、1 年の間に、経済環境や事業環境が大きく変われば、\$100 から\$500 の範囲で変動する可能性があるとのこと。
- 自分の手元に証券を購入する資金はないが、銀行から 1 年間金利 10%で\$500 まで借りることができる（10%は確実に返済される前提で設定された金利）。

解答：\$220（forward price の理論値は\$220）

- 1年後に A さんに売る価格を約束してしまつて、1年後になってからその証券を買うと、1年後の証券の価格がいくらであるかによって得をすることもあれば損をすることもある。
- そこで、銀行から\$200 借りて、今、その証券を買う（買い入れコストを確定させる）。1年後、\$200 に利息（ $\$200 \times 10\% = \20 ）を加えた\$220 を銀行に返済することになるため、1年後に A さんに\$220 で売却する約束をしておけば損得ゼロになる。

損得ゼロになることを条件として、今約束できる「将来の売買価格」は、今、お金を借りて対象となる資産を買っておくために必要な金額、すなわち「現在の価格」に「金利分を上乗せ」した価格である。今、買っておくため、将来の売買時点の価格には影響を受けない（将来の売買時点に買うことにすると、いくらかかるか分からないが、今、買ってしまうと不確定要素がなくなる）。

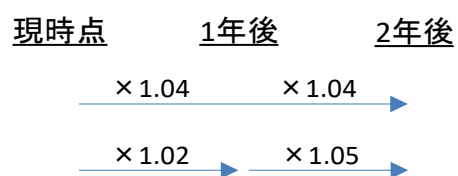


問

預入期間 1 年の定期預金の金利が年 2%であり、預入期間 2 年の定期預金の金利は年 4%である（1 年後に受け取る金利に対しても年 4%の金利を適用）。

また、1 年後における預入期間 1 年の定期預金（1 年後に預け入れて 2 年後に引き出すことができる預金）の金利を 5%で契約することができる（1 年後の金利を今決定）。

今から 2 年間、どのような形で定期預金を活用すべきか（金融機関は絶対につぶれない前提）。



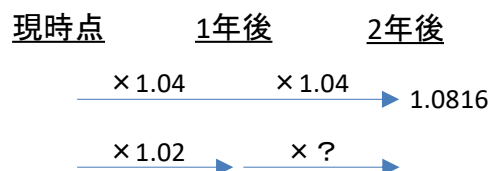
解答：預入期間 2 年の定期預金として金融機関に預ける。

$$2 \text{ 年定期} : 1.04 \times 1.04 = 1.04^2 = 1.0816$$

$$1 \text{ 年定期と } 1 \text{ 年後の } 1 \text{ 年定期} : 1.02 \times 1.05 = 1.071$$

問

1 年後における預入期間 1 年の定期預金の金利が何%であれば、どちらを選んでも損得ゼロになるか。



解答：6.04% ((**implied**) forward rate は 6.04%)

$$1.02 \times ? = 1.04^2$$

$$? = 1.04^2 \div 1.02$$

$$? = 1.0604$$

$$1 \text{ 年定期と } 1 \text{ 年後の } 1 \text{ 年定期} : 1.02 \times 1.0604 = 1.0816$$

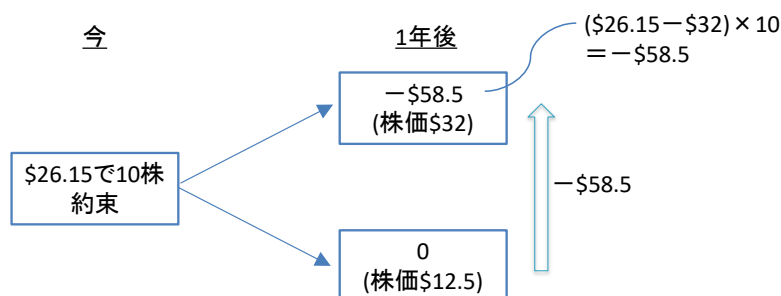
問

Cさん（必ず約束を守る人）から、ある株式を「1年後に1株\$26.15で10株買いたいので、その価格での取引を今約束してほしい」といわれた。さらに「ただ、1年後、市場の株価が\$26.15以下だったら、この約束はなかったことにしてほしい」といわれた（**contingent claim**）。1年後の株価が\$26.15を超えている場合だけ\$26.15で買いたいというのは、明らかにCさんにとって有利な条件であるため、Cさんは約束してくれたら対価として今\$30支払うといっている。

以下の前提において、Cさんと約束をした方がいいか。

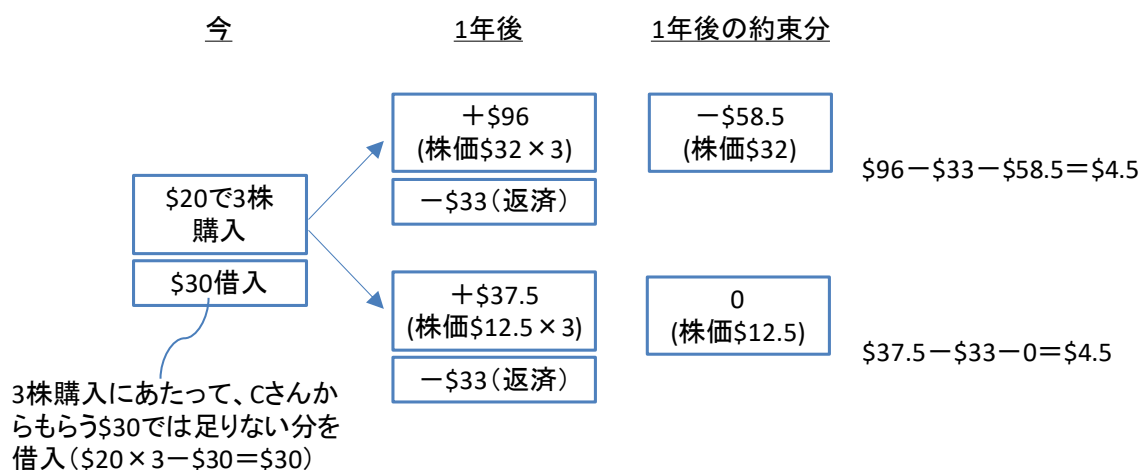
- Cさんが買いたいといっている株式の今の価格は\$20
- 1年後、株価が\$32に上昇する確率が30%、\$12.5に下がる確率が70%
- 自分の手元に株式を購入する資金はないが、銀行から1年間金利10%で\$500まで借りることができる（10%は確実に返済される前提で設定された金利）。

- ✓ 1年後、株価が\$26.15を超えていた場合のみ実行する約束であるため、今10株買ってしまうのは得策ではない（株価が下がった場合、手元に株式が残ってしまう）。10株買うのは、今ではなく1年後にした方がよさそうである。
- ✓ 1年後株価が下がっていれば何もすることはない。1年後株価が上昇していた場合、株式市場で1株\$32で10株購入して（\$320の支払い）、それをCさんに1株\$26.15で売ることになるため（\$261.5の受け取り）、何も対処しないと\$58.5損することになる（ $-\$320 + \$261.5 = -\$58.5$ ）。

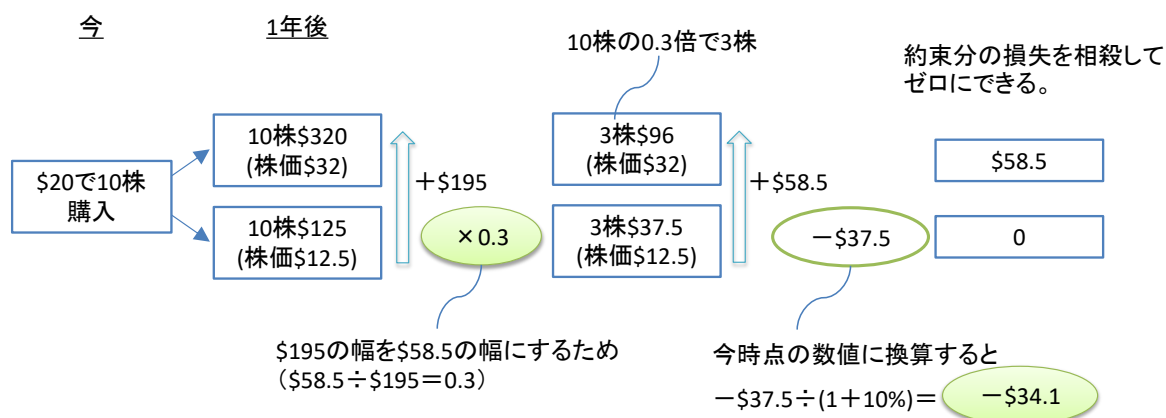


解答：対価として\$30 もらえるのであれば約束した方がよい（株価が上昇しても下落しても1年後時点で\$4.5 得する）。

- 今、株式を3株購入する（ $20 \times 3 = \$60$ ）。購入資金は、Cさんから受け取った\$30を使い、足りない分（ $60 - 30 = \$30$ ）を銀行から借入。
- 1年後、株価が\$32に上昇した場合
 - ①手元の3株と借入
購入した3株を売却して $32 \times 3 = \$96$ 手元に入る。銀行に $30 \times 1.1 = \$33$ 返済して、手元に $96 - 33 = \$63$ 残る。
 - ②Cさんとの約束
1株\$32で10株購入して（\$320支払う）、Cさんに1株\$26.15で10株売る（手元に\$261.5入る）。損益は、 $261.5 - 320 = -\$58.5$
 - ①と②をあわせると $63 - 58.5 = \$4.5$
- 1年後、株価が\$12.5に下がった場合
 - ①手元の3株と借入
購入した3株を売却して $12.5 \times 3 = \$37.5$ 手元に入る。銀行に $30 \times 1.1 = \$33$ 返済して、手元に $37.5 - 33 = \$4.5$ 残る。
 - ②Cさんとの約束
市場の株価が\$12.5であるとき、Cさんは\$26.15で買いたいとはいってこない。
 - ①と②をあわせると\$4.5



☆ 「3株」の計算方法（約束分の損益をちょうど相殺する形を作る）



損得ゼロにするために、今やること

- 株式 10 株に対して 0.3 倍の「3 株（ $\$20 \times 3 = \60 ）購入」
- 「\$34.1 の借入（ $-\$37.5 \div (1 + 10\%) = -\34.1 ）」

⇒借入以外に必要な資金は、 $\$60 - \$34.1 = \$25.9$

株式を 3 株購入する資金として\$25.9 もらえるのであれば、約束分の損益をちょうど相殺する形を作ることができる。

損得ゼロになる対価は\$25.9（Call option の理論値は\$25.9）

- 今、株式を3株購入する（ $20 \times 3 = 60$ ）。対価として受け取る\$25.9を使い、足りない分（ $60 - 25.9 = 34.1$ ）を銀行から借入。
- 1年後、株価が\$32に上昇した場合
 - ①手元の3株と借入
購入した3株を売却して $32 \times 3 = 96$ 手元に入る。銀行に $34.1 \times 1.1 = 37.5$ 返済して、手元に $96 - 37.5 = 58.5$ 残る。
 - ②Cさんとの約束
1株\$32で10株購入して（\$320支払う）、Cさんに1株\$26.15で10株売る（手元に\$261.5入る）。損益は、 $261.5 - 320 = -58.5$
 - ①と②をあわせると $58.5 - 58.5 = 0$
- 1年後、株価が\$12.5に下がった場合
 - ①手元の3株と借入
購入した3株を売却して $12.5 \times 3 = 37.5$ 手元に入る。銀行に $34.1 \times 1.1 = 37.5$ 返済して、手元のお金は $37.5 - 37.5 = 0$
 - ②Cさんとの約束
市場の株価が\$12.5であるとき、Cさんは\$26.15で買いたいとはいってこない。
 - ①と②をあわせると0

