第１章

株式価値評価と株式ポートフォリオ戦略

この章のポイント

この章では、株式価値評価と株式ポートフォリオ戦略の２つの論点を学習します。

株式価値評価については、1 次試験でも出題されている、配当割引モデルを中心とした内容の復習です。株式ポートフォリオ戦略では、ポートフォリオ理論の確認から始まり、それを基礎にマーケットモデルや3ファクター・モデルといった、ファクター・モデルによるポートフォリオのリターン分析について学習します。また、8 節以降では出題ポイントとなっている、パッシブ運用、アクティブ運用などの具体的な株式ポートフォリオ戦略の特徴や構築手法、その他売買執行戦略のコスト分析といった、実務的な論点について学習していきます。

1　株式価値評価モデル　☆☆☆

株式価値評価は、企業価値および個別株式価値の評価方法に関するもので、アクティブ運用の「個別銘柄選択」と密接である。大部分が「コーポレート・ファイナンス」と重複するため、ここでは代表的なモデルについて整理しておく。

1　配当割引モデル（DDM：Dividend Discout Model）

ある株式 1 株の保有によって将来得られるキャッシュフローを配当金とする。将来の配当金を株主の要求収益率（株主資本コスト）で現在価値に割り引き、その合計を理論株価 P とする。

$$P_0=\frac{D_1}{1+k_1}+\frac{D_2}{(1+k_2)^2}+\frac{D_3}{(1+k_3)^3}+\cdots=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{D_t}{(1+k_t)^t}$$

ただし、P_0：理論株価、D_t：t 期の配当金、

k_t：t 期の株主の要求収益率（株主資本コスト）。

配当割引モデル（DDM）の「基本形」に以下のような仮定を設け、現実に利用可能なモデルに加工する。まず、毎期の株主資本コスト（割引率）k を一定とすると、DDM はかなりシンプルになる。

$$P_0=\frac{D_1}{1+k}+\frac{D_2}{(1+k)^2}+\frac{D_3}{(1+k)^3}+\cdots=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{D_t}{(1+k)^t}$$

毎期の配当が D で一定とすると、「定額配当モデル（ゼロ成長モデル）」が導かれる。

$$P_0=\frac{D}{1+k}+\frac{D}{(1+k)^2}+\frac{D}{(1+k)^3}+\cdots=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{D}{(1+k)^t}=\frac{D}{k}$$

配当金が毎期一定率 g で成長すると「定率成長モデル」が導かれる。

$$\begin{aligned}P_0&=\frac{D_1}{1+k}+\frac{D_2}{(1+k)^2}+\frac{D_3}{(1+k)^3}+\cdots\\&=\frac{D_1}{1+k}+\frac{D_1(1+g)}{(1+k)^2}+\frac{D_1(1+g)^2}{(1+k)^3}+\cdots=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{D_1(1+g)^{t-1}}{(1+k)^t}=\frac{D_1}{k-g}\end{aligned}$$

ただし D_1：1 期後（期末）配当金。

株主の要求収益率（株主資本コスト）k は、証券アナリスト試験では CAPM などで推定する場合が多い。

$$\begin{aligned}k&=E[R_i]\\&=\beta_i\times(E[R_M]-R_f)+R_f\end{aligned}$$

ただし、$E[R_i]$：株式 i の期待収益率、β_i：株式 i の対市場ベータ、

$E[R_M]$：市場ポートフォリオの期待収益率、R_f：リスクフリー・レート。

また、配当金の成長率 g は、証券アナリスト試験ではサステイナブル成長率（P/L、B/S の全項目が同じ比率で成長し、すべての財務比率が一定に保たれる成長率）が用いられる場合が多い。

$$g = ROE \times 内部留保率 = ROE \times \left(1 - 配当性向\right)$$

配当割引モデル（DDM：dividend discount model）

1)　定額配当モデル（ゼロ成長モデル）

$$P_0 = \frac{D}{k}$$

2)　定率成長モデル

$$P_0 = \frac{D_1}{k - g}$$

3)　株主の要求収益率（株主資本コスト）…CAPM

$$k = \beta_i \left(E\left[R_M \right] - R_f \right) + R_f$$

4)　配当成長率…サステイナブル成長率

$$g = ROE \times 内部留保率 = ROE \times \left(1 - 配当性向\right)$$

2　フリーキャッシュフロー割引モデル

企業全体の資本提供者（株主と債権者）に帰属するフリー・キャッシュフローをFCFF（Free Cash Flow to Firm)、株主に帰属するフリー・キャッシュフローをFCFE（Free Cash Flow to Equity）とし、この割引現在価値の合計により企業価値、ないし株式価値を評価する方法である。協会通信テキストでは、とくにこの方法を「割引キャッシュフロー（DCF：Discounted Cash Flow）法」としている。

(1) FCFF割引モデル

割引キャッシュフローの「キャッシュフロー」は、企業全体の資本提供者に帰属するフリー・キャッシュフローなので、企業価値（EV：Enterprise Value）を評価するモデルである。割引率には企業全体の資本提供者、すなわち株主と債権者の「加重平均資本コスト（WACC：Weighted Average Cost of Capital)」を用いる。

$$EV_0 = \frac{FCFF_1}{1+WACC_1} + \frac{FCFF_2}{\left(1+WACC_2\right)^2} + \frac{FCFF_3}{\left(1+WACC_3\right)^3} + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{FCFF_t}{\left(1+WACC_t\right)^t}$$

ただし、EV_0：企業価値、$FCFF_t$：t期のフリー・キャッシュフロー、
$WACC_t$：t期の加重平均資本コスト。

企業全体の資本提供者に帰属するフリー・キャッシュフロー（FCFF）は、以下のように計算される。

$$FCFF = 税引後営業利益 + 減価償却費 - 設備投資額 - 正味運転資本増加額$$

ここで税引後営業利益（NOPAT：Net Operating Profit After Taxes）は以下の通り。

$$NOPAT = 営業利益 \times \left(1 - 法人税率\right)$$

割引率の加重平均資本コスト（WACC：Weighted Average Cost of Capital）は、以下のように計算される。

$$WACC = \frac{D}{D+E} \times k_D \times \left(1-T\right) + \frac{E}{D+E} \times k_E$$

ただし、D：負債価値、E：株式価値、k_D：負債コスト、T：実効税率、
k_E：株主資本コスト。

負債コストk_Dは、以下の有利子負債利子率を用いる場合が多い。

$$k_D = \frac{支払利息}{有利子負債残高（期首・期末平均）}$$

証券アナリスト試験の計算問題では、株主資本コスト k_E は配当割引モデル同様、CAPMに基づく期待収益率を用いる場合が多いだろう。

$$k_E = \beta_i\left(E\left[R_M\right] - R_f\right) + R_f$$

このようにして求められた企業価値から負債価値を引いて、株式価値を計算する。

$$株式価値 = 企業価値\left(EV\right) - 負債価値$$

(2) FCFE割引モデル

割引キャッシュフローの「キャッシュフロー」は、株主に帰属するフリー・キャッシュフローなので、株式価値（V：Value）を評価するモデルである。割引率には株主資本コスト k を用いる。

$$V_0=\frac{FCFE_1}{1+k_1}+\frac{FCFE_2}{\left(1+k_2\right)^2}+\frac{FCFE_3}{\left(1+k_3\right)^3}+\cdots=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{FCFE_t}{\left(1+k_t\right)^t}$$

ただし、V_0：株式価値、$FCFE_t$：t 期のフリー・キャッシュフロー、
　k_t：t 期の株主資本コスト。

株主に帰属するフリー・キャッシュフロー（FCFE）は、以下のように計算される。

$$FCFE=\text{親会社株主に帰属する当期純利益}+\text{減価償却費}-\text{設備投資額}-\text{正味運転資本増加額}+\text{負債増加額}$$

フリーキャッシュフロー割引モデルを用いても、配当割引モデル（DDM）を用いても「株式価値」、「株価」について同じ結果が得られる。以下のような場合、将来の配当の予想よりもキャッシュフローの予想の方が容易なため、実際には FCFF 割引モデルや FCFE 割引モデルのようなフリーキャッシュフロー割引モデルが用いられるケースが多いとされる（協会通信テキスト・証券分析とポートフォリオ・マネジメント・第 1 回「株式価値評価と株式ポートフォリオ戦略」p.17)。

・無配企業の場合、将来の配当の予想が難しい。
・実際の配当が配当支払い能力と大きく異なる場合、収益予想から配当の予想を導けない。
・キャッシュフローが企業収益と連動している場合、収益予想がキャッシュフローの予想に直結する。

フリー・キャッシュフロー（FCF）

企業全体の資本提供者に帰属するフリー・キャッシュフロー（FCFF）

$$FCFF=\text{税引後営業利益}+\text{減価償却費}-\text{設備投資額}-\text{正味運転資本増加額}$$

※税引後営業利益（NOPAT：Net Operating Profit After Taxes）

$$NOPAT=\text{営業利益}\times\left(1-\text{法人税率}\right)$$

株主に帰属するフリー・キャッシュフロー（FCFE）

$$FCFE=\text{親会社株主に帰属する当期純利益}+\text{減価償却費}-\text{設備投資額}-\text{正味運転資本増加額}+\text{負債増加額}$$

なお、フリーキャッシュフロー割引モデルの計算問題は、おそらく毎期の資本コスト（割引率）が一定、フリーキャッシュフローが毎期一定率で成長する「定率成長モデル」として出題されるだろう。考え方は配当割引モデルの定率成長モデルと同じである。

FCFF 割引モデル

$$EV_0 = \frac{FCFF_1}{1+WACC} + \frac{FCFF_2}{(1+WACC)^2} + \frac{FCFF_3}{(1+WACC)^3} + \cdots$$

$$= \frac{FCFF_1}{1+WACC} + \frac{FCFF_1(1+g)}{(1+WACC)^2} + \frac{FCFF_1(1+g)^2}{(1+WACC)^3} + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{FCFF_1(1+g)^{t-1}}{(1+WACC)^t} = \frac{FCFF_1}{WACC-g}$$

ただし、EV_0：企業価値、$FCFF_1$：1 期後（期末）フリーキャッシュフロー、
$WACC$：加重平均資本コスト、g：サステイナブル成長率。

FCFE 割引モデル

$$V_0 = \frac{FCFE_1}{1+k} + \frac{FCFE_2}{(1+k)^2} + \frac{FCFE_3}{(1+k)^3} + \cdots$$

$$= \frac{FCFE_1}{1+k} + \frac{FCFE_1(1+g)}{(1+k)^2} + \frac{FCFE_1(1+g)^2}{(1+k)^3} + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{FCFE_1(1+g)^{t-1}}{(1+k)^t} = \frac{FCFE_1}{k-g}$$

ただし、V_0：株式価値、$FCFF_1$：1 期後（期末）フリーキャッシュフロー、
k：株主の要求収益率、g：サステイナブル成長率。

フリーキャッシュフロー割引モデル

1） FCFF 割引モデル（定率成長モデル）

$$EV_0 = \frac{FCFF_1}{WACC-g}$$

ただし、$FCFF_1$：1 期後（期末）フリーキャッシュフロー、
$WACC$：加重平均資本コスト、g：サステイナブル成長率。

加重平均資本コスト

$$WACC = \frac{D}{D+E} \times k_D \times (1-T) + \frac{E}{D+E} \times k_E$$

2） FCFE 割引モデル（定率成長モデル）

$$V_0 = \frac{FCFE_1}{k-g}$$

ただし、$FCFE_1$：1 期後（期末）フリーキャッシュフロー。

3 残余利益モデル

クリーンサープラス関係を前提として配当割引モデルを展開すると、残余利益モデルが導かれる。残余利益モデルによれば、理論株価は期首 1 株当たり株主資本（BPS）に将来の残余利益の割引現在価値を加えたものとして評価される。

残余利益とは、株主の必要収益を超過した利益（超過利益）である。

$$\text{残余利益} = \underbrace{\text{期首自己資本} \times ROE}_{\text{純利益}} - \underbrace{\text{期首自己資本} \times k}_{\text{必要収益}}$$
$$= \text{期首自己資本} \times (ROE - k)$$

ただし、ROE：自己資本利益率、k：株主の要求収益率。

したがって、1 株当たりの残余利益は以下のようになる。

$$\text{1株当たり残余利益} = BPS_0 \times ROE - BPS_0 \times k$$
$$= BPS_0 \times (ROE - k)$$

ただし、BPS_0：期首 1 株当たり株主資本。

理論株価 P は以下のように計算される。

$$P_0 = BPS_0 + \frac{(ROE_1 - k_1)BPS_0}{1 + k_1} + \frac{(ROE_2 - k_2)BPS_1}{(1 + k_2)^2} + \frac{(ROE_3 - k_3)BPS_2}{(1 + k_3)^3} + \cdots$$

$$= BPS_0 + \underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} \frac{(ROE_t - k_t)BPS_{t-1}}{(1 + k_t)^t}}_{\text{残余利益の現在価値合計}}$$

ただし、ROE_t：t 期の自己資本利益率、

k_t：t 期の株主の要求収益率（株主資本コスト）

BPS_{t-1}：t 期首の 1 株当たり株主資本。

残余利益モデルの計算問題は、おそらく毎期の株主資本コスト（要求収益率）および ROE が一定、残余利益が毎期一定率で成長する「定率成長モデル」として出題されるだろう。考え方は配当割引モデルの定率成長モデルと同じである。

$$P_0 = BPS_0 + \frac{(ROE - k)BPS_0}{1 + k} + \frac{(ROE - k)BPS_1}{(1 + k)^2} + \frac{(ROE - k)BPS_2}{(1 + k)^3} + \cdots$$

$$= BPS_0 + \frac{(ROE - k)BPS_0(1 + g)}{(1 + k)^2} + \frac{(ROE - k)BPS_0(1 + g)^2}{(1 + k)^3} + \cdots$$

$$= BPS_0 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(ROE - k)BPS_0(1 + g)^{t-1}}{(1 + k)^t}$$

$$= BPS_0 + \frac{(ROE - k)BPS_0}{k - g}$$

残余利益モデル

残余利益：$残余利益 = 期首自己資本 \times (ROE - k)$

1株当たり残余利益：
$$1株当たり残余利益 = BPS_0 \times ROE - BPS_0 \times k$$
$$= BPS_0 \times (ROE - k)$$

残余利益モデル（定率成長モデル）：$P_0 = BPS_0 + \dfrac{(ROE - k)BPS_0}{k - g}$

2　2パラメータ・アプローチ　☆☆☆

1　リターンとリスクの指標－期待収益率と分散・標準偏差－

投資家が自己の資産を金融資産で運用するときには、得られるリターンとそれに伴うリスクを考慮して可能な投資対象の中から、自己にとって最も望ましい投資を選択する。すなわち、投資家は可能な投資機会(投資機会集合)の中から自己の効用を最大にする投資を決定する。このため、投資対象を決定するにあたっては、

①　投資家の選好

リターンとリスクの組合せに対して、投資家はいかなる態度で臨むか？

②　投資機会集合

さまざまな銘柄への投資によって、リターンとリスクの組合せとしてどのような選択肢が存在するか？

という2点を考察する必要がある。

これら2つの問題を、リターンとリスクとの関係に着目して考えていく。

そして、ポートフォリオ理論では、

リターンの尺度……期待収益率（収益率の期待値）

リスクの尺度……収益率の分散（または標準偏差）

を用いて分析を進める。このため、**2パラメータ・アプローチ**（2 parameter approach）あるいは**平均・分散アプローチ**（mean−variance approach）とも呼ばれる。

2　投資家の選好

投資家は期待効用を最大にするように行動する。その際、リスクとリターンを評価しながら投資対象を決定する。

一般に、投資家にとって、他の条件が全く同じであれば、リターンが高ければ高いほど望ましい投資対象と考えられるだろう。これに対し、リスクについての評価は投資家によってかなり異なる。経済学では、経済主体をリスクに対する態度によって、

①　**リスク中立的**（risk neutral）

②　**リスク回避的**（risk averse）

③　**リスク愛好的**（risk loving）

の3つのタイプに分類する。

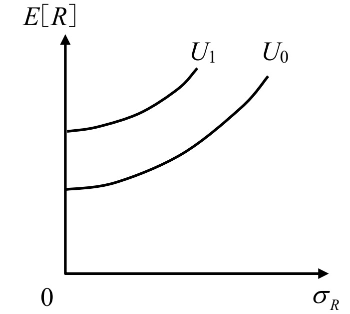
ポートフォリオ理論がその対象とするのは、**リスク回避的な投資家**である。

リスク回避的な投資家は、次のような性格を持つ。

・リスクの程度が同じであればリターンがより高い方を選択する。
・リターンが同じであればリスクの小さい方を選択する。

ここで、リターンの尺度として期待収益率（収益率Rの期待値）$E[R]$、リスクの尺度として収益率の標準偏差σ_Rを用いることにすれば、リスク回避的な投資家の選好は次のような右上がりの無差別曲線として描ける。

《リスク回避的な投資家の無差別曲線》

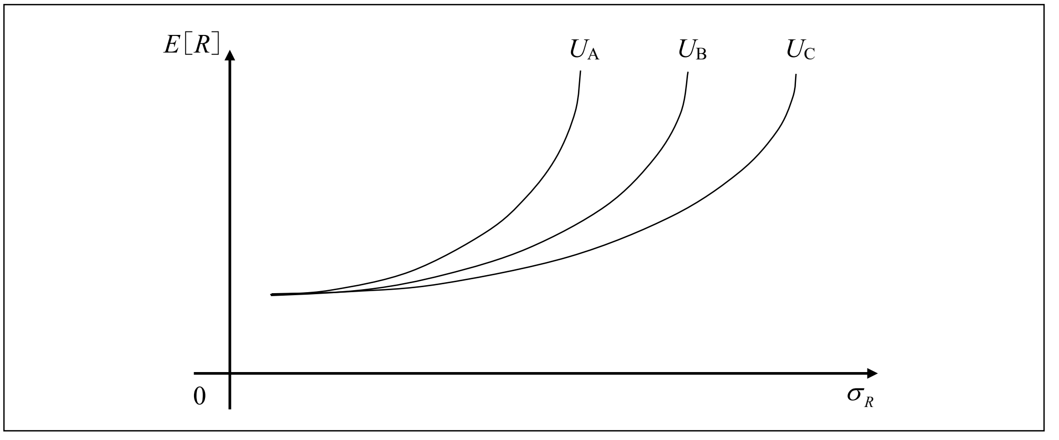


ここでの無差別曲線は、効用が等しくなるリターンとリスクの軌跡である。リスク回避的な投資家の場合、リスクが大きいほど効用は下がるから、同一の効用を維持するためにはそれを補うだけのリターンの向上が必要になる。このため、リスク回避的な投資家の無差別曲線は右上がりの曲線として描ける。

なお、リスク回避的な投資家といっても、投資家の無差別曲線の形状は、投資家ごとに異なる。リスク許容度の大きい投資家に比べ、リスク許容度の小さい投資家の方が、

リスクが大きくなったとき、同一の効用を維持するために必要となるリターンの上昇幅はより大きくならなければならないので、無差別曲線の傾きはより大きくなる。

《リスク許容度と無差別曲線》



上のグラフで、3 人のリスク回避的投資家（A，B，C）について考えると、リスクが高くなるにつれ、より高いリターンを要求しているのは投資家 A である。これに対してリスクが高くなっても要求するリターンの上昇が最も緩やかなのは投資家 C である。これは、リスク許容度によって各投資家の選好が異なるためであり、それぞれのリスク許容度は A，B，C の順にしたがって、次第に大きくなる。

なお、投資家の効用水準については、効用関数として以下のように一般化されることが多い。

$$U_i = \mu_P - \frac{1}{2}\lambda_i \sigma_P^2$$
$$= \mu_P - \frac{1}{2\tau_i}\sigma_P^2$$

U_i：第 i 番目の投資家の効用（i＝A，B，C，…）
μ_P：ポートフォリオの期待収益率
σ_P：ポートフォリオの収益率の標準偏差
λ_i：第 i 番目の投資家のリスク回避度（逆数の τ_i はリスク許容度）

リスク回避的な投資家の場合 $\tau_i>0$ であり、各投資家 i の選好はこの定数によって決まる。上のグラフの場合、$\tau_A<\tau_B<\tau_C$ となっており、リスク許容度の大きい投資家ほど τ_i は大きくなるため、この定数はリスク許容度を表す数値となっている。

3 投資機会集合

本論に入る前に、投資の基礎概念をもう一度整理しておこう。

1．リターン

① 投資収益率　$r = \dfrac{収　益}{投資額}$

② 期待収益率　$E[R] = \sum_{i=1}^{n} P_i r_i$

$$\begin{cases} P_i：第\,i\,番目の状態の生起確率 \quad \sum_{i=1}^{n} P_i = 1 \\ R：収益率（第\,i\,番目の状態における実現値が\,r_i） \end{cases}$$

2．リスク

① 分散　$Var(R) = E[(R - E[R])^2] = \sum_{i=1}^{n} P_i (r_i - E[R])^2$

② 標準偏差　$\sigma_R = \sqrt{Var(R)}$

3．共分散（$\boldsymbol{Cov(R_X, R_Y)}$あるいは$\boldsymbol{\sigma_{XY}}$）

$$Cov(R_X, R_Y) = E[(R_X - E[R_X])(R_Y - E[R_Y])]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_i (r_{X,i} - E[R_X])(r_{Y,i} - E[R_Y])$$

4．相関係数（ρ_{XY}）

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(R_X, R_Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (-1 \leqq \rho \leqq 1)$$

$$\longrightarrow Cov(R_X, R_Y) = \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y$$

(1) ポートフォリオの収益率

n 銘柄の証券に投資する場合を考える。各証券への投資比率をそれぞれ w_1, w_2, …, w_n とし、各証券の投資収益率をそれぞれ R_1, R_2, …, R_n とする。このとき、ポートフォリオの収益率 R_P は、次式のように投資比率をウェイトとした個別銘柄の収益率の加重平均となる。

ポートフォリオの収益率

$$R_P = w_1R_1 + w_2R_2 + \cdots + w_nR_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_iR_i$$

＝（各証券への投資比率×各証券の収益率）の合計

ただし、$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

(2) ポートフォリオの期待収益率

n 銘柄の証券に投資する場合の期待収益率（収益率の期待値）は、次式のように投資比率をウェイトとした個別銘柄の期待収益率の加重平均として表せる。

ポートフォリオの期待収益率

$$E(R_P) = w_1E(R_1) + w_2E(R_2) + \cdots + w_nE(R_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_iE(R_i)$$

＝（各証券への投資比率×期待収益率）の合計

(3) ポートフォリオの収益率の分散、標準偏差

ポートフォリオの収益率の分散は、投資比率や個別銘柄の収益率の分散（あるいは標準偏差）のほかに各銘柄間の共分散（あるいは相関係数）の影響を受ける。つまり、各銘柄の投資収益率の変動が互いにどのような関係にあるかが、ポートフォリオの収益率の変動を考えるときに重要な役割を果たす。

(a) 2 銘柄のケース

ポートフォリオの収益率の分散（2 銘柄のケース）

$$Var(R_P) = w_1^2Var(R_1) + w_2^2Var(R_2) + 2w_1w_2Cov(R_1, R_2) \quad (1.2.1)$$

あるいは、

$$\sigma_P^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \quad (1.2.2)$$

ただし、$w_1 + w_2 = 1$

1.　（1.2.1）式で、分散を標準偏差で、共分散を相関係数を用いて $Cov(R_1, R_2) = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2$ と表せば、（1.2.2）式が得られる。
2.　ポートフォリオの期待収益率が各証券の期待収益率の単純な加重平均で示されたのに対し、ポートフォリオの収益率の分散は各証券の収益率の分散の単純な加重平均にはならず、銘柄間の共分散（あるいは相関係数）の影響を受ける。組み入れ証券の間の相関係数が 1 より小さければ、ポートフォリオのリスクは各構成証券のリスク加重平均値未満に抑えることができる。これを**ポートフォリオのリスク分散効果**という。

(b) 3 銘柄のケース

3 証券に投資する場合については、次式のように表される。

ポートフォリオの収益率の分散（3 銘柄のケース）

$$Var(R_P) = w_1^2 Var(R_1) + w_2^2 Var(R_2) + w_3^2 Var(R_3) + 2w_1w_2Cov(R_1, R_2) + 2w_1w_3Cov(R_1, R_3) + 2w_2w_3Cov(R_2, R_3)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} w_i^2 Var(R_i) + 2\sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{j=1\\ j>i}}^{3} w_i w_j Cov(R_i, R_j)$$

これを標準偏差をベースにして表せば、

$$\sigma_P^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 + 2w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2w_1w_3\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2w_2w_3\rho_{23}\sigma_2\sigma_3$$

$$= \sum_{i=1}^{3} w_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{j=1\\ j>i}}^{3} w_i w_j \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

ただし、$w_1 + w_2 + w_3 = 1$

ポートフォリオの収益率の分散（*n* 銘柄のケース）

$$Var(R_P) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} w_i w_j \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \quad \cdots\cdots①$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j>i}}^{n} w_i w_j \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \quad \cdots\cdots②$$

上の 3 銘柄のケースでは②式を使っているが、計算結果はいずれを使っても同じである。

なお、ポートフォリオの収益率の分散（n 銘柄のケース）を行列により表すと、以下のとおりとなる。

各リスク資産への投資比率ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

リスク資産の分散共分散行列を $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$

とすれば、ポートフォリオの分散 $\boldsymbol{\sigma_P^2}$ は

$$
\begin{aligned}
\sigma_P^2 &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma x} \\
&= \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + \cdots + x_n^2\sigma_n^2 \\
&\quad +2\begin{pmatrix} x_1x_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \cdots + x_1x_n\rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \quad + x_2x_3\rho_{23}\sigma_2\sigma_3 + \cdots + x_2x_n\rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \quad +\cdots \\ \quad\quad + x_{n-1}x_n\rho_{n-1,n}\sigma_{n-1}\sigma_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と表すことができる。

(4) ポートフォリオの期待収益率（リターン）と収益率の標準偏差（リスク）の関係 －投資機会集合－

投資家が選択可能な投資対象全体を**投資機会集合**という。

(a) 2 銘柄のケース

2 銘柄からポートフォリオを構成するとき、縦軸にリターンをとり、横軸にリスクをとったグラフ上で、投資機会集合は相関係数の値によって、曲線または直線として描ける。

相関係数と投資機会集合（危険資産２銘柄のケース）

① 正の完全相関（相関係数 $\rho_{AB}=1$）のケース：

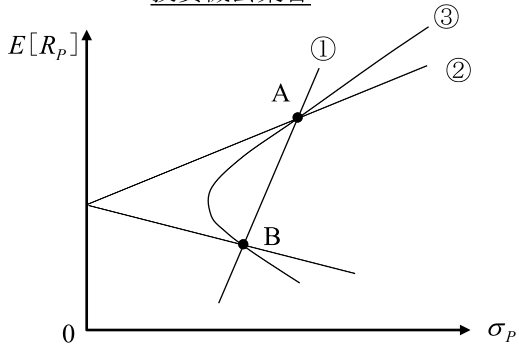
2 銘柄 A，B を表す点を結んだ直線

② 負の完全相関（相関係数 $\rho_{AB}=-1$）のケース：

2 銘柄 A，B を表す点を通る折れ線

標準偏差を 0 にもできる。

投資機会集合



1. 一般のケース（$-1<\rho_{AB}<1$）においては、投資機会集合は A，B を通る曲線で表される。…③
2. 正の完全相関（相関係数が $\rho_{AB}=1$）のケースにおいては、ポートフォリオの期待収益率および収益率の標準偏差は

期待収益率：$E(R_P)=w_A E(R_A)+w_B E(R_B)$

標準偏差：$\sigma_P{}^2=w_A{}^2\sigma_A{}^2+w_B{}^2\sigma_B{}^2+2w_A w_B\sigma_A\sigma_B$ （$\because\ \rho_{AB}=1$）

$\therefore\ \sigma_P=w_A\sigma_A+w_B\sigma_B$

と表される。ここで、保有比率に関して

$w_A+w_B=1$

であるので、以上 3 式から w_A、w_B を消去すれば、

$$\sigma_P=\frac{\sigma_A-\sigma_B}{E(R_A)-E(R_B)}(E(R_P)-E(R_B))+\sigma_B$$

となり①のように 2 銘柄 A，B を表わす点を結んだ直線となる。すなわち投資機会集合は 2 点 A，B を通る直線で表される。

3. 負の完全相関（相関係数が $\rho_{AB}=-1$）のケースにおいては、ポートフォリオの収益率の標準偏差は

$\sigma_P=\left|w_A\sigma_A-w_B\sigma_B\right|$

と表されるから、w_A，w_B を消去すれば、

$$\sigma_P=\left|\frac{\sigma_A+\sigma_B}{E(R_A)-E(R_B)}(E(R_P)-E(R_B))-\sigma_B\right|$$

となり、②のように 2 銘柄 A，B を通る折れ線となる。また、保有比率が、

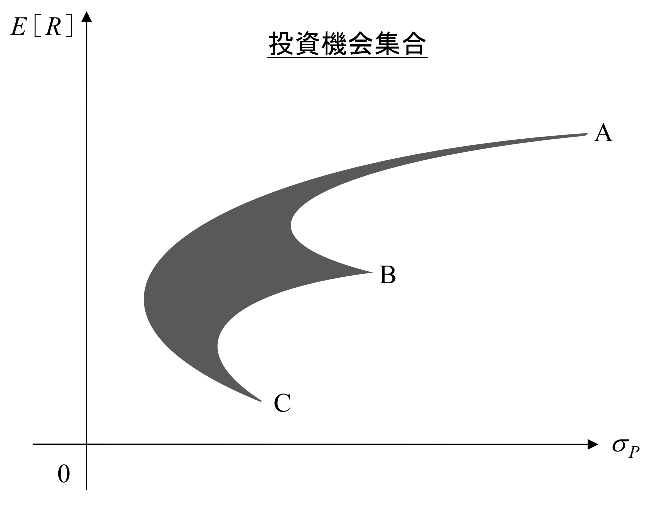
$$w_A = \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}$$

のとき、ポートフォリオの標準偏差は 0 になる。

4. 2 銘柄を正に保有比率で持つ（つまり AB 間で表される）とき、相関係数が小さくなればなるほど、同じ期待収益率を表す点は左側に位置することになる。これは相関係数が小さいほどポートフォリオのリスク分散効果が大きいことを示している。

(b) 一般のケース

3 銘柄以上からなるケースの投資機会集合は、安全資産が存在せず、かつ、どの 2 銘柄間をとっても相関係数が 1 でも－1 でもなければ、次の図のように曲線とその右側として表せる。



4　効率的フロンティア

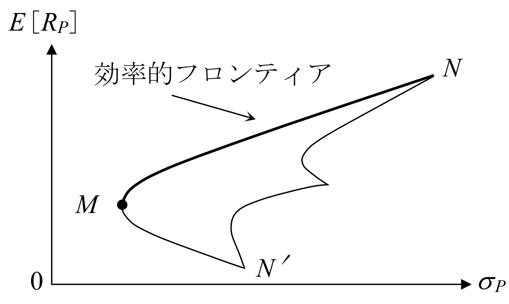
1. で述べたように、投資家のポートフォリオ選択は、「投資機会集合から効用を最大にする投資案を選択する」問題として定式化される。

しかし危険回避的な投資家を前提とすれば、投資機会集合全体を考える必要はなく、上の問題は「効率的フロンティアの中から、効用を最大にする投資案を選択する」問題に限定して考えることができる。

効率的フロンティア（efficient frontier）とは、危険回避的な投資家にとって選択対象となりうるポートフォリオの集合をいい、効率的フロンティア上のポートフォリオを**効率的ポートフォリオ**（efficient portfolio）」という。

(1)　危険資産のみからなるケース

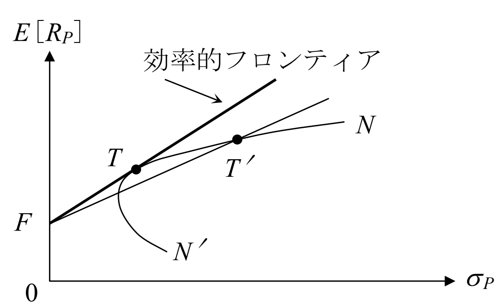
3 銘柄以上からなるケースの投資機会集合は、安全資産が存在せず、かつ、どの2銘柄間をとっても相関係数が$-1<\rho<1$ であれば、右図のような曲線 NMN' とその右側として表せる。



ところで、危険回避的な投資家は、リターンが同じであればリスクの最も小さい投資案を望ましいと考えるから、曲線 NMN' の右側の部分は選択対象とはなりえず、最も左側の部分である曲線 NMN' （最小分散境界）のみに着目すればよい。また、リスクが同じであればリターンの最も大きい投資案を望ましいと考えるから、曲線のうち上半分（傾きが正の部分）の NM のみが選択対象となりうることになる。したがって、危険資産のみからなるケースの効率的フロンティアは、最小分散ポートフォリオ M よりも右上に位置する NM ということになる。

(2)　安全資産を含むケース

安全資産と危険資産からなるポートフォリオの場合、投資機会集合は安全資産と危険資産を示す点を結ぶ直線として表せる。いま、安全資産 F が存在するときの効率的フロンティアは安全資産を表す点 F から曲線にひいた接線である直線FTになる（このとき、Tを**接点ポートフォリオ**という）。なぜなら、接点以外の点（たとえば T' ）をとると、直線 FT' よりも左上に実行可能なポートフォリオが存在することになるため、危険回避的な投資家にとって直線 FT' は効率的フロンティアとはなりえないからである。

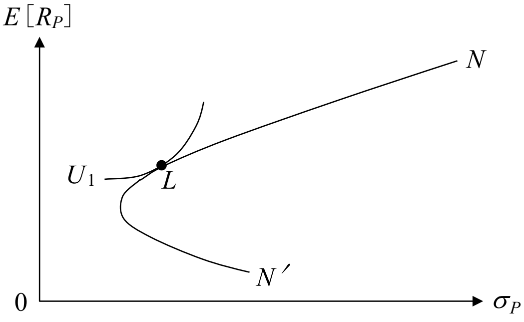


5 最適ポートフォリオ

投資家のポートフォリオ選択は、「効率的フロンティアの中から、効用を最大にする投資案を選択する」ものと定式化できた。この効率的フロンティアの中で効用を最大にする投資案（ポートフォリオ）を**最適ポートフォリオ**（optimal portfolio）という。

(1) 危険資産のみからなるケース

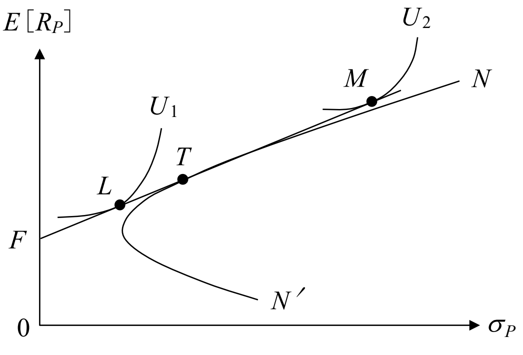
最適ポートフォリオは、効率的フロンティア上で投資家の無差別曲線と接する点で表される。したがって、無差別曲線が U_1 で表される投資家の場合は L が最適ポートフォリオとなる。



(2) 安全資産を含むケース

安全資産と危険資産からなるポートフォリオの場合、効率的フロンティアは安全資産と危険資産の表す点を結ぶ直線として表される。

したがって、無差別曲線が U_1 で表される投資家の場合は L、U_2 で表される投資家の場合は M が最適ポートフォリオとなる。



なお、L では、安全資産（F）と危険資産である接点ポートフォリオ（T）を正の比率で保有しているが、M では、安全資産を負の比率で保有し（したがって、借り入れを行い）接点ポートフォリオに投資することになる。そのため、FT 上のポートフォリオを**貸付ポートフォリオ**、TM 上のポートフォリオを**借入ポートフォリオ**と呼ぶこともある。

以上から、実は、投資家の選好がいかなるものであろうと安全資産（F）と接点ポートフォリオ（T）が選択されることになる。つまり、リスク資産の最適な組合せ（T）の決定は、安全資産を含む最適ポートフォリオの決定の問題とは分離可能である。これを**分離定理**（separation theorem）という。

3　資本資産評価モデル(CAPM)　☆☆☆

1　資本資産評価モデル（CAPM）

資本資産評価モデル（Capital Asset Pricing Model、CAPM）とは、市場に参加するすべての投資家が、マーコヴィッツ（H.Markowitz）によって展開された2パラメータ・アプローチにしたがって行動したとき、証券価格はどのように形成されているかについて考察した理論である。

シャープ（W.Sharpe）とリントナー（J.Lintoner）によって独立に導かれた資本資産評価モデルは、次のような仮定のもとで成立する。

Ⅰ．資本市場に関する仮定

（仮定1）摩擦のない市場（frictionless market）

売買委託手数料や取引税などの取引コストや情報コストはかからない。

（仮定2）分割可能性

証券は完全に分割可能である。すなわち、単元株制度などの取引単位の制約を受けず、すべての証券をいくらでも小さい単位で売買できる。

（仮定3）市場参加者がきわめて多数

投資家は価格に関してはプライステイカーであり、個々の投資家の行動は市場価格に影響を及ぼさない。

Ⅱ．危険資産に関する仮定

（仮定4）空売りが自由

すべての危険資産の空売りは無制限にできる。

（仮定5）資産の収益率の確率分布

資産の収益率は正規分布にしたがう。*1

Ⅲ．安全資産に関する仮定

（仮定6）無リスク利子率

投資リスクを伴わない資産、すなわち安全資産が存在し、どの投資家もこの無リスク利子率（安全資産利子率）で、無制限に貸借を行うことができる。

Ⅳ．投資家に関する仮定

（仮定7）投資家の選好に関する仮定

すべての投資家は危険回避的に行動し、投資家は1期間後の富のもたらす期待効用が最大になるように資産選択を行う。

（仮定8）同質的期待の仮定

投資家は証券の収益率に関して同一の予想をもつ。

（仮定9）投資家の効用関数

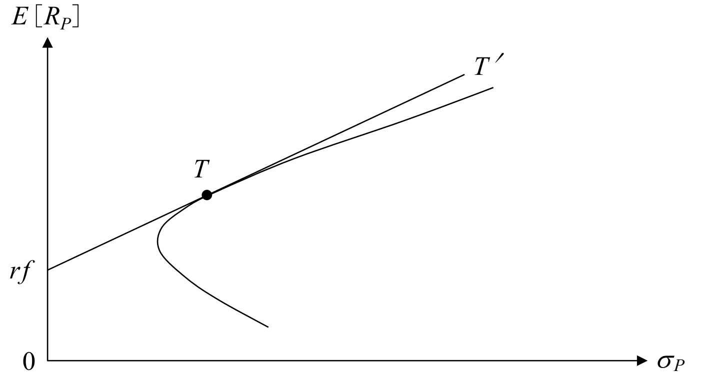
投資家の効用関数が2次関数で表される。*2

＊1、＊2の仮定は必然的なものではなく、これらのいずれかが成立すればよい。

これらの仮定は現実とは必ずしも合っているわけではないが、各条件は相当程度緩和することはできる。

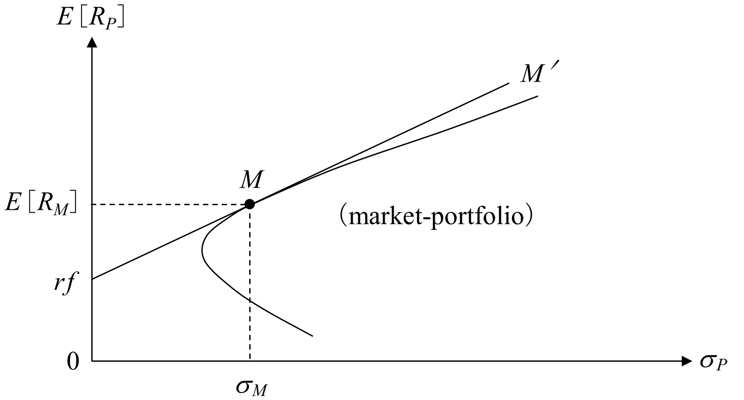
2　資本市場線

上記のような仮定のもとでは、効率的フロンティアは次図のような、無リスク利子率 rf と接点ポートフォリオ T を結んだ直線 $rfTT'$ になる。



（仮定 8）のもとでは、直線 $rfTT'$ はすべての投資家に共通の効率的フロンティアとなる。したがって、すべての投資家はリスク証券のポートフォリオとしては接点ポートフォリオ T のみを保有することになる。

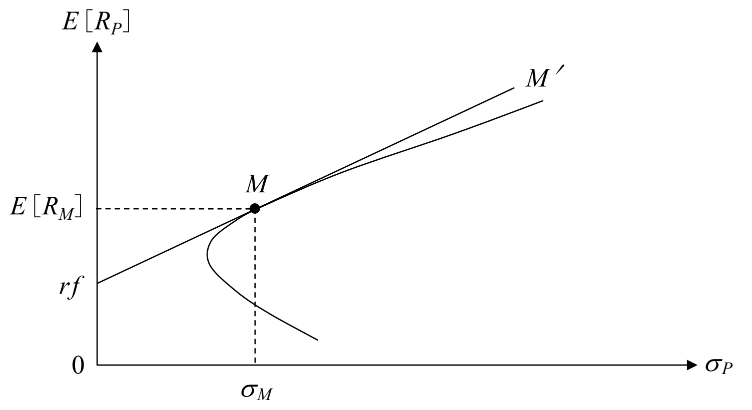
以上は、各証券の現在の価値水準や 1 期間の収益率の予想を所与として、各投資家の主体的均衡を考えたものだが、証券の需給が均衡するような価格水準においては、すべての投資家が次の図の直線 $rfMM'$ 上でポートフォリオを保有することになる。



ここで、危険資産の最適組合せは接点ポートフォリオである M であるが、すべての証券について需要と供給が等しい均衡状態においては、M は**市場ポートフォリオ**（market−portfolio）と呼ばれる。市場ポートフォリオとは、市場に存在するすべての危険資産をその時価総額の比率で含んだポートフォリオである。

ここで市場ポートフォリオの期待収益率を $E[R_M]$、標準偏差を σ_M とすると、効率的ポートフォリオ P のリスクとリターンの関係は次ページの図の直線 $rfMM'$ で表される。この直線を**資本市場線**（capital market line, CML）という。

資本市場線（CML）



$$E(R_P) = rf + \frac{E(R_M) - rf}{\sigma_M}\sigma_P \qquad (1.3.1)$$

1.　均衡における効率的ポートフォリオの期待収益率は、（投資収益率の標準偏差で測定した）リスクの正の 1 次関数であることを示している。したがって、リスクが大きくなればなるほど期待収益率は大きくなる関係が示されている。
2.　資本市場線（CML）の傾き $\dfrac{E(R_M) - rf}{\sigma_M}$ は、投資リスクを 1 単位減らすにはどれだけのリターンを犠牲にしなければならないかを表す数値であり、**リスクの市場価格**（market price of risk、MPR）と呼ばれる。
3.　資本市場線（CML）の切片である rf は安全資産の需要を均衡させる利子率で、**時間の市場価格**（market price of time, MPT）と呼ばれる。

3　CAPMと証券市場線

資本市場線（CML）では効率的ポートフォリオにおけるリターンとリスクの関係が期待収益率と標準偏差によって表されていたが、効率的フロンティア上にないポートフォリオや個別証券についてはこの関係は成立しない。そこで、次のステップとして、各証券（またはポートフォリオ）についてリターンとリスクとの関係はどのように表せるかを考える。

ところで、資本市場線（CML）を表す（1.3.1）式からポートフォリオのリスク・プレミアム（$E(R_P)-rf$）は、

$$E(R_P)-rf=\frac{E(R_M)-rf}{\sigma_M}\times\sigma_P$$

＝リスク 1 単位当たりの市場価格×ポートフォリオのリスク（標準偏差）

と表せる。

ポートフォリオを構成する各個別証券は、当該証券をポートフォリオに組み入れたことによってポートフォリオのリスクの増減に貢献しているわけだから、均衡における各証券のリスク・プレミアムを考える際には、各証券がポートフォリオのリスクの増減にどれだけ寄与しているか、すなわち、ポートフォリオのリスクに対する**限界的寄与**を考慮する必要がある。そして、各証券のリスク・プレミアムは、リスクの市場価格とポートフォリオのリスクに対する限界的寄与との積として表すことができると考えられる。

個別の証券 i のポートフォリオのリスクに対する限界的寄与は、

$$\frac{Cov(R_i,\ R_M)}{\sigma_M}$$

であることが知られている。

第 i 証券のリスク・プレミアム（$E(R_i)-rf$）は、前述のように、リスク 1 単位当たりの市場価格×ポートフォリオのリスクに対する限界的寄与に等しくなると考えられるから、

$$E(R_i)-rf=\frac{E(R_M)-rf}{\sigma_M}\times\frac{Cov(R_i,\ R_M)}{\sigma_M}$$

と表せる。この式は**資本資産評価モデル（CAPM）**と呼ばれ、特に Sharpe＝Lintner 型の CAPM と呼ばれる。さらに、CAPM において、

$$\beta_i=\frac{Cov(R_i,\ R_M)}{{\sigma_M}^2}$$

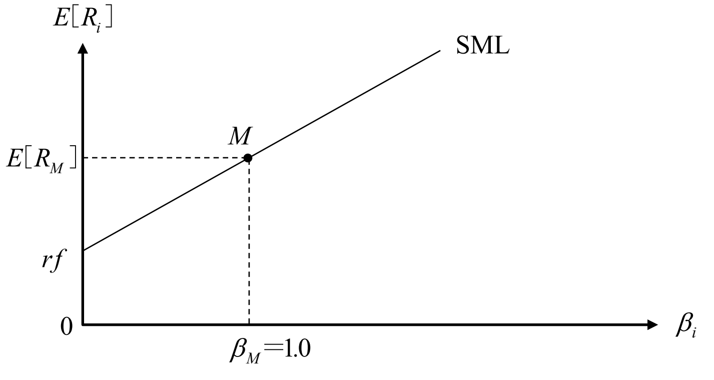
と定義すれば次式のように表すこともでき、これにより各証券についてリターンとリスクの関係を示す**証券市場線**（security market line, SML）が得られる。

証券市場線（SML）

$$E(R_i)=rf+[E(R_M)-rf]\beta_i \qquad (1.3.2)$$

ただし、$\beta_i=\dfrac{Cov(R_i,\ R_M)}{\sigma_M{}^2}$

証券市場線（SML）



図のように、市場ポートフォリオのベータ（β_M）は、ベータの定義から、

$$\beta_M=\frac{Cov(R_M,\ R_M)}{\sigma_M{}^2}=\frac{\sigma_M{}^2}{\sigma_M{}^2}=1.0$$

となり、必ず 1.0 である。

証券市場線から、各証券の期待収益率は均衡において（β で測定した）リスクの正の 1 次関数であることが示される。すなわち、負担するベータ・リスクが大きいほど、証券の期待収益率は大きくなければならないことを意味する。また、個々の証券は均衡状態においてはすべて、証券市場線（SML）上に位置するように価格形成されなければならないことを意味する。

4　CAPMの実証

CAPMについては広く実証研究が行われてきた。さまざまな問題が絡み合い、複雑な様相を呈しているが、ここでは基本的な問題について取り上げる。

(1) CAPMの実証の前提条件

CAPMは事前のモデルである。つまり、投資家はこれから投資を行おうとする段階で投資収益等を予想するわけだが、その予想の世界で成立しているリターンとリスクとの関係を捉えたものがCAPMである。このようなCAPMの実証を行うために事後的な数値を用いるには、次のような仮定が成立している必要がある。

資産の収益率は正規分布に従い、将来も分布は安定的である。

(2) CAPMの実証の対象

時点tにおける証券iの実現収益率$R_{i,t}$が、次のように描写されるとする。(R_i， R_M)

$$R_{i,t} = rf_t + \beta_i (R_{M,t} - rf_t) + e_{i,t} \tag{1.3.3}$$

ただし、撹乱項は$E(e_{i,t})=0$として、(1.3.3)式の期待値をとればCAPM(1.3.2)が成立する。

推定の際には、(1.3.3)式を

$$R_{i,t} - rf_t = \beta_i (R_{M,t} - rf_t) + e_{i,t}$$

という、超過収益率の形に書き換え、これから、回帰モデル

$$R_{i,t} - rf_t = \alpha_i + \beta_i (R_{M,t} - rf_t) + e_{i,t} \tag{1.3.4}$$

を仮定して、推定誤差を小さくするために複数銘柄から成るポートフォリオを作り、ポートフォリオのベータ(β_P)、及び、定数項α_iを推測する。

つまり、回帰直線

$$R_{p,t} - rf_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} (R_{M,t} - rf_t)$$

が推定されることになる。

(3) CAPMからの予測

CAPMが成立するとすれば、

① ポートフォリオ間の超過収益率の差は主としてβ_Pの差によって説明でき、この式に他の変数を付け加えても有意な説明力をもたない

② 切片αの推定値はゼロから有意に乖離しない

(4) 実証結果

これまでアメリカを中心として行われてきた実証研究において明らかにされた結論は、必ずしもCAPMの成立とは整合的なものではない。すなわち、

① ベータは他のリスク尺度（たとえば分散）より説明力をもっているものの、ベータの他に株価収益率（PER）、株価純資産倍率（PBR）、配当利回り、あるいは企業規模などの変数を加えると回帰のあてはまりは向上する。

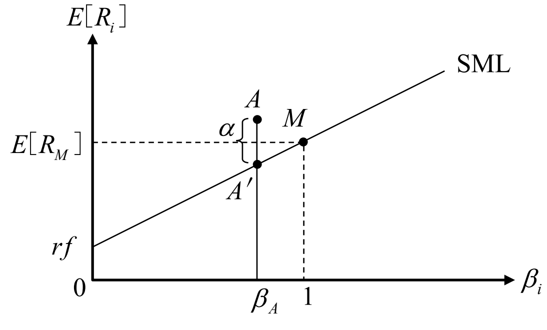
② 切片αの推定値は正である

という結果が得られている。

5 CAPMの投資への利用

各証券がCAPMに従って価格形成されているとすれば、すべての個別証券（またはポートフォリオ）は証券市場線（SML）上に位置していなければならない。このことは逆に、もし証券市場線上に位置しない証券があれば、一時的に誤った価格形成がされていることを意味する。したがって、証券市場線（SML）はこうした証券の発見の基準となる。

(a) 証券のアルファ値



証券市場線（SML）が右図のように描け、証券Aの期待収益率と標準偏差が証券市場線からはずれて点Aで描けるものとする。このとき、点 A′は証券 A のベータ・リスク（β_A）に対応する証券市場線（SML）上の点であり、点 A′の高さは、β_A に対する均衡期待収益率である。このとき、CAPM を前提とすると証券 A は一時的に誤って価格づけされていることになる。図のように市場線（SML）より上に位置づけられるときには、期待収益率が均衡期待収益率を上回っているわけだから、現在の水準は均衡価格水準に比べて安くなっている。すなわち証券Aの価格は過小評価されており、「買い」の対象と考えられる。もし図とは逆に証券市場線（SML）より下に位置づけされるときには、当該証券の価格は過大評価されていることになり、「売り」の対象と考えられる。このように、誤って価格づけされているかどうかは証券市場線との位置関係によって判定され、期待収益率と均衡期待収益率との差である**アルファ値**がその判定指標となる。

証券のアルファ値と投資方針

アルファ（α）値＝期待収益率－均衡期待収益率

$\alpha>0$ ⇨ 過小評価 → 「買い」

$\alpha<0$ ⇨ 過大評価 → 「売り」

(b) 証券特性線

CAPM を前提とするとき、アルファ値は回帰分析を用いて求めることができる。

先に（1.3.4）で取り上げた回帰モデル

$$R_{i,t}-rf_t=\alpha_i+\beta_i(R_{M,t}-rf_t)+e_{i,t} \qquad (1.3.4\text{ 再掲})$$

を用いて、回帰係数（α_i，β_i）を推定すれば、

第 i 証券の収益率は

$$R_i-rf=\hat{\alpha}_i+\hat{\beta}_i(R_M-rf) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

という式で表せる。これを**証券特性線**という。

ところで、M が市場ポートフォリオを表すものとし、CAPM が成立しているとすれば、（1.3.2）式から、

$$E(R_i)-rf=\beta_i[E(R_M)-rf] \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

が成立するはずだから、$\hat{\alpha}_i=0$ でなければならない。

したがって $\hat{\alpha}_i\neq0$ であれば、CAPM から判断すれば、誤って価格づけされているという結論が導かれる。

なお、ここで取り上げている定数項の推定値 $\hat{\alpha}_i$ は、実は、パフォーマンス評価測度としてのジェンセンのアルファである。

(c) 歴史的ベータと将来ベータ

過去の投資収益率のデータから回帰分析により求めたベータは**歴史的ベータ**（historical beta）といわれるが、CAPM は投資をする段階でのリスクとリターンとの関係を示すものである。この意味で事前のモデルであり、投資決定に必要となるのは予定投資期間に係る**将来ベータ**（future beta）である。このため、歴史的ベータによって投資決定を行うには、安定性に関する考慮が必要となる。

4　マーケット・モデル　☆☆

1　マーケット・モデル

マーケット・モデル（市場モデル）は、市場収益率を用いて各証券の収益率を表そうとする**単一指標モデル**（シングルファクター・モデル）である。

マーケット・モデル

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + e_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1}$$

$$e_i \sim N(0,\ \sigma^2{}_{ei}) \tag{2}$$

$$Cov(e_i,\ R_M)=0 \tag{3}$$

$$\mathrm{Cov}(e_i,\ e_j)=0\,(i \neq j) \tag{4}$$

ただし、R_M　：市場収益率、
R_i　：第 i 証券の収益率（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）
e_i　：第 i 証券に固有の撹乱項（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）
α_i, β_i　：定数

(1)から分かるように、マーケット・モデルは、各証券の収益率を市場収益率という単一指標によって説明するモデルであり、より具体的には、第 i 証券の収益率は市場収益率 R_M に連動する部分とその証券固有の部分とに分けて説明できると考えるモデルである。

また、(2)～(4)は、マーケット・モデルにおかれる仮定で、

(2)　各証券に固有の撹乱項は期待値 0 で分散が $\sigma_{ei}{}^2$ （一定）の正規分布に従う。

(3)　各証券固有の撹乱項は市場収益率と無相関である。

(4)　異なる証券の撹乱項は互いに無相関である。

ということを意味する。

これにより、各証券間の収益率の連動性が市場収益率との連動性のみによって説明されることになる。

2 各証券の期待収益率、分散および各証券間の共分散

マーケット・モデルが成立する場合の各証券の期待収益率、分散および各証券間の共分散は次のように表せる。

第 *i* 証券の期待収益率

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i E(R_M) \tag{5}$$

1. (5)式は以下のように導出される。
   (1)式の両辺の期待値をとり、(2)式より $E(e_i) = 0$ であることを用いれば
   $$\begin{aligned} E(R_i) &= E(\alpha_i + \beta_i R_M + e_i) \\ &= \alpha_i + \beta_i E(R_M) + E(e_i) \\ &= \alpha_i + \beta_i E(R_M) \end{aligned}$$
2. 各証券の期待収益率は、
   その証券に固有の部分＋市場全体の動きに関連する部分
   α_i ＋ $\beta_i E(R_M)$

で表される。

このとき、第2項（$\beta_i E(R_M)$）は**システマティック・リターン**（市場関連的リターン）、第1項（α_i）は**アンシステマティック・リターン**（非市場関連的リターン）という。

第 *i* 証券の収益率の分散

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{ei}^2 \tag{6}$$

（証明）

(1)式の両辺の期待値をとり、

(2)より、$E[e_i^2] = \sigma_{ei}^2$，(3)より $E[\{R_M - E(R_M)\}e_i] = 0$

であることを用いれば、

$$\begin{aligned} Var(R_i) &= E[\{R_i - E(R_i)\}^2] \\ &= E[\{(\alpha_i + \beta_i R_M + e_i) - (\alpha_i + \beta_i E(R_M))\}^2] \\ &= E[\beta_i^2 \{R_M - E(R_M)\}^2 + 2\beta_i \{R_M - E(R_M)\} e_i + e_i^2] \\ &= \beta_i^2 E[\{R_M - E(R_M)\}^2] + 2\beta_i E[\{R_M - E(R_M)\} e_i] + E[e_i^2] \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{ei}^2$$

(6)式から各証券の分散はその証券に固有の部分$\sigma_{ei}{}^2$と、市場全体の動きに関連する部分$\beta_i{}^2\sigma_M{}^2$の和であることがわかる。分散をリスクの指標と見れば、各証券の総リスクは、各証券のリスクと市場リスクの和に等しいといえる。市場リスクは**システマティック・リスク**、各証券固有のリスク（非市場リスク）は**アンシステマティック・リスク**とも呼ばれる。

以上をまとめると、

> **各証券の総リスク（分散）**
> $\sigma_i{}^2 \quad = \quad \beta_i{}^2\sigma_M{}^2 \quad + \quad \sigma_{ei}{}^2$
> 総リスク＝システマティック・リスク＋アンシステマティック・リスク

(6)式を変形すると、この関係は次のように見ることもできる。両辺を総リスク（$\sigma_i{}^2$）で除せば、

$$1 = \frac{\beta_i{}^2\sigma_M{}^2}{\sigma_i{}^2} + \frac{\sigma_{ei}{}^2}{\sigma_i{}^2}$$

この式の右辺第 1 項は、総リスクに占めるシステマティック・リスクの割合を、右辺第 2 項は、総リスクに占めるアンシステマティック・リスクの割合を示している。

ここで、β_iが回帰係数であることに着目して、

$$\beta_i = \frac{Cov(R_M,\ R_i)}{\sigma_M{}^2} = \frac{\rho_{iM}\sigma_i\sigma_M}{\sigma_M{}^2} = \frac{\rho_{iM}\sigma_i}{\sigma_M}、$$

とおけば、総リスクに占めるシステマティック・リスクの割合である右辺第 1 項は

$$\frac{\beta_i^2\sigma_M^2}{\sigma_i^2} = \frac{\left(\dfrac{\rho_{iM}\sigma_i}{\sigma_M}\right)^2\sigma_M^2}{\sigma_i^2} = \rho_{iM}{}^2$$

すなわち、相関係数の 2 乗となることが確認でき、さらに、相関係数の 2 乗は決定係数に等しくなることがわかる。

> **総リスクに占めるシステマティック・リスクの割合**
> 　＝相関係数の 2 乗＝決定係数

次に、各証券の共分散は次のように表せる。

第 i 証券、第 j 証券間の共分散

$$\sigma_{ij}=\beta_i\beta_j\sigma_M{}^2$$

（証明）

(2)および(4)より、 $E[e_ie_j]=0$、

(3)より $E[\{R_M-E(R_M)\}e_i]=0$ であることを用いれば、

$$\begin{aligned}Cov(R_i,\ R_j)&=E[\{R_i-E(R_i)\}\{R_j-E(R_j)\}]\\&=E[\{\beta_i(R_M-E(R_M))+e_i\}\{\beta_j(R_M-E(R_M))+e_j\}]\\&=\beta_i\beta_jE[\{R_M-E(R_M)\}^2]+\beta_iE[\{R_M-E(R_M)\}e_j]\\&\quad+\beta_jE[\{R_M-E(R_M)\}e_i]+E[e_ie_j]\end{aligned}$$

$$\therefore\sigma_{ij}=\beta_i\beta_j\sigma_M{}^2$$

3　分散投資の効果

マーケット・モデルが成立する場合の各証券の総リスクは、市場リスク（システマティック・リスク）と非市場リスク（アンシステマティック・リスク）の合計であることが示されたが、これらのリスクが分散投資によってどうなるかを考える。

いま、マーケット・モデル(1)～(4)式のもとで、n 種類の証券にそれぞれ、w_1，w_2，…，w_n の投資比率で投資すると考える。ポートフォリオの予想収益率は、投資比率をウェイトとした個別銘柄の予想収益率の加重平均であるから次のようになる。

$$R_P = w_1R_1 + w_2R_2 + \cdots + w_nR_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} w_iR_i$$

これより(5)式をもとにするとポートフォリオの期待収益率は次式で示される。

ポートフォリオの期待収益率

$$E(R_P) = \sum_{i=1}^{n} w_i\alpha_i + E(R_M)\sum_{i=1}^{n} w_i\beta_i$$

また、ポートフォリオの分散は次のように表される。

ポートフォリオの分散

$$\sigma_P{}^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\beta_i\right)^2 \sigma_M{}^2 + \sum_{i=1}^{n} w_i{}^2\sigma_{ei}{}^2$$

ポートフォリオの分散は、上式で表され，個別証券の場合と同様に、右辺第 1 項はポートフォリオのシステマティック・リスクを意味し、右辺第 2 項はアンシステマティック・リスクを意味する。

ここで n 個の証券に均等割合で投資することを想定すると、各個別証券への投資比率は $\frac{1}{n}$ となる。

$$\sigma_P{}^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\beta_i\right)^2 \sigma_M{}^2 + \sum_{i=1}^{n} w_i{}^2\sigma_{ei}{}^2$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\beta_i\right)^2 \sigma_M{}^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ei}{}^2$$
$$\leqq \beta_P{}^2\sigma_M{}^2 + \frac{1}{n}\bar{\sigma}_{ei}{}^2$$

（ただし、$\bar{\sigma}_{ei}{}^2$ は個別証券のアンシステマティック・リスクの最大値）

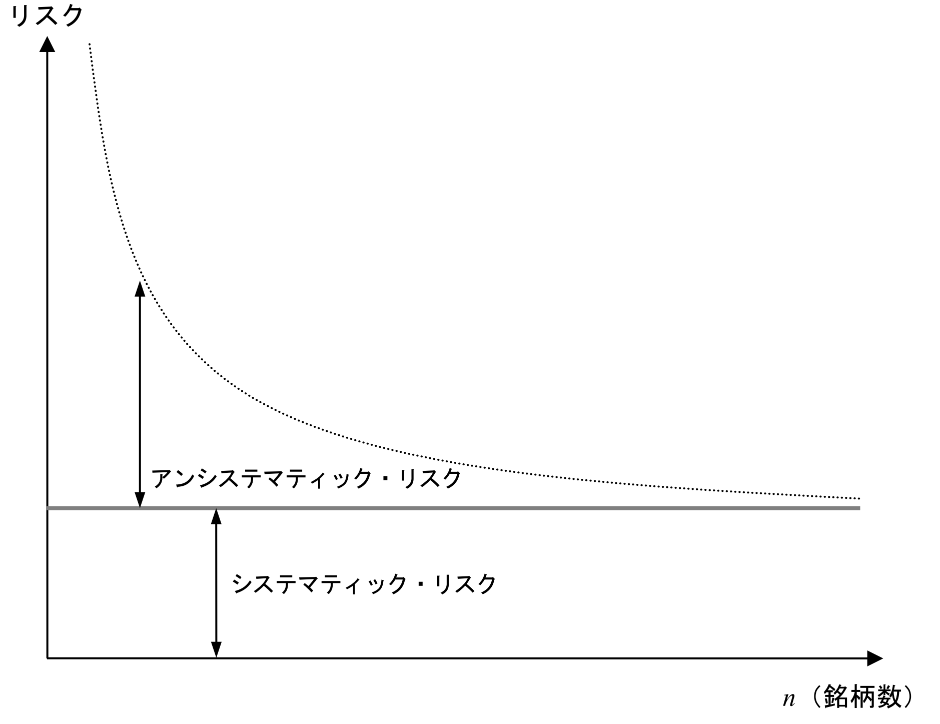
そして銘柄数 n を限りなく増やすと、$\frac{1}{n}\bar{\sigma}_{ei}{}^2$ は 0 に近づき、$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ei}{}^2$ も 0 に近づく。

$$\sigma_P{}^2 = \lim_{n\to\infty}\{\beta_P{}^2\sigma_M{}^2 + \frac{1}{n}\bar{\sigma}_{ei}{}^2\} = \beta_P{}^2\sigma_M{}^2$$

このことは、銘柄数を増やせば個別証券に固有のアンシステマティック・リスクはポートフォリオ内部で消去し合いゼロに近づくが、市場と連動するシステマティック・リスクは消去不可能であることを意味する。

結局ポートフォリオ（P）の総リスクは $\beta_P{}^2\sigma_M{}^2$（ないし $\beta_P\sigma_M$）まで限りなく逓減させることができる。これが分散投資の効果である。

$$\beta_P{}^2\sigma_M{}^2 \fallingdotseq \sigma_M{}^2$$



５　効率的市場仮説　☆☆

1　市場の効率性

(1)　効率的市場とは？

シャープ（William F. Sharpe）によれば、効率的市場は次のように定義される。

> **効率的市場**（efficient market）
> 効率的市場とは、「すべての証券の市場価格が常にその投資価値に等しい市場」をいう。

この定義から明らかなように、市場が効率的であれば、株式・債券その他すべての証券の価格は、それら証券のファンダメンタルズ（証券がもたらすキャッシュフローとそれに伴うリスク）を正しく反映した値となる。逆に、市場が効率的でないとすれば、証券価格はファンダメンタルズを正しく反映した値からは乖離しがちになる。このような場合には、投資家はこの乖離（ミスプライシング）を利用することにより、リスクに見合った以上に高い収益を上げることができるようになる。

市場で成立する証券価格は、投資家の将来の予想（expectation，期待）に基づいた証券取引を通じて形成される。この予想は利用可能なさまざまな情報に基づいて形成されるので、証券価格はこうした情報によって決まるといえる。

それでは、この投資家にとって利用可能な情報は、証券価格にどの程度のスピードと正確性をもって反映されるだろうか？もし市場が効率的であれば、現在までに発生している情報はすべて価格に正確に織り込まれているし、新しい情報が発生すれば直ちに証券価格は変動しその情報は瞬時かつ正確に反映されることになる。この場合、その情報を利用したとしてもリスクに見合った以上の収益はあげられないはずである。この情報の利用という点に着目すると、市場の情報効率性（informational efficiency）について次のようにまとめることができる。

> **市場の情報効率性**
> 情報に関して効率的な市場では、「投資家がある情報に基づいてどのように投資戦略を構築したとしても、リスクに見合った収益を超える過大な収益を平均的にあげることはできない」。

(2) 効率的市場仮説

現実の証券市場は情報に関して効率的な市場であろうか？その問いに対してイエスと答える考え方を**効率的市場仮説**（efficient market hypothesis）と呼ぶ。

ファーマ（Eugene F. Fama）は、証券価格が反映する情報を**ウィーク型、セミストロング型、ストロング型**の 3 つのレベルに分類し、効率的市場仮説の成否に関する実証研究を整理した。

(a) ウィーク型の効率性（weak-form efficiency）

現在の証券価格が、過去の証券価格の情報を完全に織り込んでいるかどうかを問題にするのが、ウィーク型の効率性の問題である。ウィーク型の効率性が成立していれば、現在の証券価格は、過去の証券価格の変動をすべて織り込んでいることになるから、過去の証券価格の変動パターンの分析から投資戦略を構築したとしても、過大なリターンを平均的にあげることはできないことになる。よって、この場合、過去の株価を分析する**テクニカル分析は否定**されることになる。

アメリカの実証研究によれば、後述する 1 月効果や曜日効果のようなウィーク型の効率性に否定的な現象も見受けられるものの、ウィーク型の効率性の成立はおおむね支持されている。

(b) セミストロング型の効率性（semi-strong-form efficiency）

現在の証券価格が、過去の証券価格の情報も含めあらゆる公開情報を正確に織り込んでいるかを問題にするのが、セミストロング型の効率性の問題である。セミストロング型の効率性が成立していれば、現在の証券価格は、公開情報をすべて織り込んでいることになるから、有価証券報告書その他の財務情報や、株式分割や増配・減配、M&A に関するニュース等の公開されている企業情報の分析から投資戦略を構築したとしても、過大なリターンを平均的にあげることはできないことになる。よって、そうした企業情報を用いて割高・割安の判断をして投資に活用しようとする**ファンダメンタル分析も否定**される。

アメリカの実証研究によれば、この仮説も大体当てはまるとされる。

(c) ストロング型の効率性（strong-form efficiency）

公開情報のみならず一部の投資家にしか知られていない情報も、現在の証券価格に正確に織り込まれているかを問題にするのが、ストロング型の効率性の問題である。ストロング型の効率性が成立していれば、インサイダー情報でさえも現在の証券価格は正確に織り込んでいることになるから、インサイダー取引によっても過大なリターンは得られないことになる。

アメリカの実証研究によれば、プロのファンドマネジャーにより運用されていたミューチュアルファンドの長期的なパフォーマンスが素朴な買い持ち戦略を上回る実績をあげていなかったことからストロング型の効率性を肯定するものもあるが、インサイダー取引その他の事例からストロング型の効率性は概ね否定されている。

	効率性テストの種類	情報の種類	分析の効果が否定される情報の例
(a)	ウィーク・フォーム	過去の株価系列	ケイ線、チャート、 フィルター・ルール
(b)	セミストロング・ フォーム	すべての公開情報	マクロ経済指標、利益予想、 配当予想
(c)	ストロング・ フォーム	利用可能な すべての情報	インサイダー情報

2 アノマリー

証券市場の効率性をめぐるアメリカの実証研究のなかで、効率的市場仮説に反する変則性（アノマリー）が発見されている。**アノマリー**とは、証券市場に見られるある種の傾向であり、そのような傾向が見られる合理的な理由がまだ不明なものをいう。代表的なアノマリーとしては、次のようなものが報告されている。

(1) 1月効果（January effect）

アメリカでは、他の月に比べて1月は特に収益率が高くなる傾向がある。投資家は所得税の関係で12月中に損切りして1月に新たな投資をするから1月に値上がりする傾向が生ずるとする仮説もかつて提唱された。

(2) 曜日効果

曜日効果とは、特定の曜日のリターンが他の曜日に比べて高い（低い）という現象をいう。アメリカでは、金曜日のリターンが高く、月曜日のリターンが低いと言われている。

なお、日本については、火曜日のリターンが低いという報告がある。

(3) リターン・リバーサル／モメンタム

アメリカでは、3年から5年といった長期のリターンをみると、過去のパフォーマンスのよかった（悪かった）ポートフォリオは次の3年から5年ではパフォーマンスが悪くなる（よくなる）、つまり、リターンの系列相関がマイナスになるリターン・リバーサルという現象が観察されている。また、6ヵ月といった短期については、リターンの系列相関がプラスになるモメンタムが存在するとされる。

(4) 規模効果（size effect）

企業規模（時価総額）の大きい企業（大型株）よりも小さい企業（小型株）に対する投資収益率の方が高い傾向が観察される。

(5) バリュー株効果

近年の実証研究によれば、PBRの低い株式（バリュー株）はPBRの高い株式（グロース株）をコンスタントに上回る収益率をあげている。なお同様の現象はPERについても見られ、低PERの株式は高PERの株式に比べ、高い収益率を上げている。

こうしたアノマリーはこの他にも多く報告されているが、アノマリーの存在は効率的市場仮説との関係で問題になる。

これに対する評価は分かれるが、1つの考え方は、アノマリーは誰でもその事実を知っているにもかかわらず、これらの効果が存在するということは市場が非効率的である

ことを示しているとする考え方である。

これに対してもう 1 つの考え方は、アノマリーは理論的な解明が不十分なだけで市場はあくまでも効率的であるという考え方がある。こうした効率的市場仮説の成立を肯定する立場からは、例えば上記の規模効果とバリュー株効果は、それぞれ流動性リスクと財務リスク（倒産リスク）を反映したものであるという説明がされる。そして、このことは、シャープ＝リントナー型のオリジナル CAPM では確かに銘柄間収益率格差を捉えきれないにしても、マーケット・ファクターに小型株ファクターとバリュー株ファクターを加えたファーマ＝フレンチの 3 ファクター・モデルによれば収益率格差を捉えることができるといった主張へとつながっている。

6　マルチファクターモデルと APT　☆☆☆

1　マルチファクター・モデル

市場に存在するさまざまな証券のリターンは、金利・為替レート・インフレ率その他多数のファクターの影響を受ける。こうしたファクターの各証券への影響は実際さまざまであり、また、中には、特定の証券にしか影響を与えないものもある。

そこで、証券の収益率が複数のファクターによって決まるとする**マルチファクター・モデル**は、次のように各証券に影響を与える**コモン・ファクター**（**共通ファクター**、あるいは単に**ファクター**とも呼ぶ）とその証券の**固有リターン**の 1 次関数として、次のように表せるとすると仮定する。

マルチファクター・モデル

$$R_i = a_i + b_{i,1}F_1 + b_{i,2}F_2 + \cdots + b_{i,K}F_K + e_i \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad [1.6.1]$$

ただし、R_i：証券 i の投資収益率
F_k：第 k 番目のコモン・ファクター（$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ K$）
a_i：証券 i の固有リターンの期待値（定数）
$b_{i,k}$：証券 i の第 k 番目のコモン・ファクターに対する**感応度**（**エクスポージャー**）（定数）
e_i：証券 i の固有リターンの変動部分

〔1.6.1〕で示されるマルチファクター・モデルには、さらに、次のような仮定がおかれる。

● 固有リターンの変動部分の期待値はゼロである。

$$E[e_i] = 0 \qquad [1.6.2]$$

なお、このような固有リターンの変動リスクを**イディオシンクラティック・リスク** idiosyncratic risk という。

● コモン・ファクターと固有リターンは無相関である。

$$Cov(F_k,\ e_i) = 0 \qquad [1.6.3]$$

● 異なる証券の固有リターンは無相関である。

$$Cov(e_i,\ e_j) = 0 \qquad (i \neq j) \qquad [1.6.4]$$

このとき、ポートフォリオのリターン R_P は、各証券への投資比率を w_i（i =1，2，…，n）とすれば、

$$
\begin{aligned}
R_P &= w_1R_1 + w_2R_2 + \cdots + w_nR_n \\
&= w_1(a_1 + b_{1,1}F_1 + \cdots + b_{1,K}F_K + e_1) + w_2(a_2 + b_{2,1}F_1 + \cdots + b_{2,K}F_K + e_2) \\
&\quad + \cdots + w_n(a_n + b_{n,1}F_1 + \cdots + b_{n,K}F_K + e_n) \\
&= (w_1a_1 + w_2a_2 + \cdots + w_na_n) \\
&\quad + (w_1b_{1,1} + w_2b_{2,1} + \cdots + w_nb_{n,1})F_1 + \cdots + (w_1b_{1,K} + w_2b_{2,K} + \cdots + w_nb_{n,K})F_K \\
&\quad + (w_1e_1 + w_2e_2 + \cdots + w_ne_n)
\end{aligned}
$$

ただし、$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$

と求めることができ、次のように表せる。

ポートフォリオのリターン

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} w_i a_i + \left(\sum_{i=1}^{n} w_i b_{i,1}\right)F_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} w_i b_{i,K}\right)F_K + \sum_{i=1}^{n} w_i e_i \qquad 〔1.6.5〕$$

ただし、$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ ：投資比率の合計

この式からわかるように、第 k 番目のコモン・ファクター F_k に対する感応度は $\sum_{i=1}^{n} w_i b_{i,k}$ となるから、「各証券のファクターに対する感応度に投資比率をかけた合計」として計算することができる。

●*QUESTION*

証券A，B，Cの収益率が、マルチファクター・モデル

$R_i = a_i + b_{i,1}F_1 + b_{i,2}F_2 + e_i$　　　　　（i＝A，B，C）

ただし，$E[e_i]=0$

によって示せるとする。

なお、各証券について定数項（a_i）及び感応度（$b_{i,1}$，$b_{i,2}$）は次のとおりであった。

	a_i	$b_{i,1}$	$b_{i,2}$
証券A	2.0%	1.8	2.0
証券B	3.0%	0.3	1.0
証券C	5.0%	0.8	−1.6

また、コモン・ファクターの期待値は、第1ファクター（F_1）が2.0%、第2ファクター（F_2）が1.5%である。

このとき、次のポートフォリオの期待収益率を求めなさい。

(1) 証券Aを20%、証券Bを40%、証券Cを40%組み入れたポートフォリオ

(2) 第1ファクターの感応度が1で、第2ファクターの感応度が0のポートフォリオ

●*ANSWER*

(1) まず、各証券の期待収益率を求める。モデル式の両辺の期待値を取れば、

$E[R_i] = a_i + b_{i,1}E[F_1] + b_{i,2}E[F]_2$（∵ $E[e_i]=0$）より、

証券A：$E[R_A]=2.0+1.8\times2.0+2.0\times1.5=8.6$（%）

証券B：$E[R_B]=3.0+0.3\times2.0+1.0\times1.5=5.1$（%）

証券C：$E[R_C]=5.0+0.8\times2.0-1.6\times1.5=4.2$（%）

次に、ポートフォリオの期待収益率$E[R_P]$を求める。

$E[R_P]=0.2\times8.6+0.4\times5.1+0.4\times4.2=5.44$（%）

(2) まず、組入比率を求める。証券A，Bへの組入比率をそれぞれw_A，w_Bとすると、証券Cへの組入比率は$1-w_A-w_B$と表せる。ポートフォリオのファクター感応度は、各証券のファクター感応度に組入比率をかけた合計として計算でき、以下の式が成立する。

第1ファクター：$1.8w_{\mathrm{A}}+0.3w_{\mathrm{B}}+0.8(1-w_A-w_B)=1$

第2ファクター：$2w_A+w_B-1.6(1-w_A-w_B)=0$

これを解くと、$w_{\mathrm{A}}=0.3$，$w_{\mathrm{B}}=0.2$，$1-w_A-w_B=0.5$となるから、証券Aへの組入比率は30%、証券Bへの組入比率は20%、証券Cへの組入比率は50%となる。

次に、ポートフォリオの期待収益率$E[R_P]$を求める。

$E[R_P]=0.3\times8.6+0.2\times5.1+0.5\times4.2=5.7$（%）

2 APT（裁定価格理論）

リスクとリターンのトレード・オフ関係を明らかした資産価格理論としては、前述の資本資産評価モデル（CAPM）がもっとも有名であるが、ここでは、ロス（S.A.Ross）によって提唱された APT（Arbitrage Pricing Theory、裁定価格理論）を取り上げる。

CAPM は、リスク回避型投資家が証券を取引する市場において証券の需給均衡という市場均衡が成立する場合に、各証券のリターンの違いがベータのみによって説明されるとするシングル・ファクター・モデルである。これに対し、以下で取り上げる APT は、証券の収益率がさまざまなファクターによって決まるマルチファクター・モデルを前提として、無裁定条件（ノーフリーランチの原理）が成立する場合にリスクとリターンがどのような関係になるかを示したモデルである。

(1) 仮　定

APT の前提として、次の点を仮定する。

1. 十分に多数の資産の存在

   取引可能な資産数は、資産の収益率に影響を与えるコモン・ファクターの数に比べて十分に多い。

2. マルチファクター・モデル

   各証券の収益率は、前述の〔1.6.1〕～〔1.6.4〕で表されるものとする。ただし、ここでの導出を簡単にするために、コモン・ファクターは 2 つだけとし、さらに、$F_k - E[F_k] = f_k$（$k = 1, 2, \cdots, K$）として、次のように表す。

$$R_i = E[R_i] + b_{i,1}f_1 + b_{i,2}f_2 + e_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad 〔1.6.6〕$$

$$E[e_i] = 0 \qquad 〔1.6.2〕$$

$$Cov(f_k, e_i) = 0 \qquad 〔1.6.3'〕$$

$$Cov(e_i, e_j) = 0 \qquad (i \neq j) \qquad 〔1.6.4〕$$

   ここで、コモン・ファクターのリターンを f_k（$= F_k - E[F_k]$）として、実際のリターンと期待値との乖離として定義したのは、計算上の便宜を考慮したものである。加えて、このように表すと、コモン・ファクターのコンセンサスからの乖離として直観的に捉えやすいという利点もある。

3. 無リスク資産の存在

   無リスク資産が存在し、無リスク利子率を R_f とする。

4. 無裁定条件（ノーフリーランチの原理）

   市場には合理的な投資家が十分おり、裁定機会は存在しない。すなわち、一物一価が成立しているとして、リターンとリスクの関係を導く。

(2) APT公式の導出

市場では十分に多数の資産が取引されているので、分散投資を通じて固有リターンの変動リスク（イディオシンクラティック・リスク）はほぼ 0 にできる。よって、資産 i が十分に分散化されたポートフォリオと考えれば〔1.6.6〕は、

$$R_i = E[R_i] + b_{i,1}f_1 + b_{i,2}f_2 \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n) \qquad 〔1.6.7〕$$

と表すことができる。

さらに、こうしたイディオシンクラティック・リスクが 0 になった資産を適当に組み合わせれば、コモン・ファクターF_k（k＝1，2）とまったく同一の動きをするポートフォリオをつくることが可能であり、こうしたポートフォリオを**ファクター・ポートフォリオ**と呼ぶ。この場合、ファクター1 のファクター・ポートフォリオは F_1 に対する感応度（$b_{F_1,1}$）が 1、F_2 に対する感応度（$b_{F_1,2}$）が 0 であり、ファクター2 のファクター・ポートフォリオは F_1 に対する感応度（$b_{F_2,1}$）が 0、F_2 に対する感応度（$b_{F_2,2}$）が 1 である。また、ファクターk に対するファクター・ポートフォリオの収益率を R_{F_k} と表す。

さて、ここで裁定取引を考えることにする。

任意のポートフォリオ i を購入し、そのポートフォリオのファクター1 及びファクター2 に対する感応度を、ファクター・ポートフォリオを売却してヘッジし、全体でファクターに対する感応度を 0 にしよう。

具体的には、任意のポートフォリオ i を 1 円購入すれば、期末には〔1.6.7〕より $1+E[R_i]+b_{i,1}f_1+b_{i,2}f_2$ 円受取ることができる。ここで、f_1、f_2 は確率変数だから、その感応度である $b_{i,1}$ 円、$b_{i,2}$ 円だけ、それぞれファクター1 及びファクター2 のファクター・ポートフォリオを売却してヘッジする。この取引によるキャッシュ・フローは次のようになる。

取引対象	取引	取引金額	取引時投資額	期末キャッシュ・インフロー
ポートフォリオi	買い	1	1	$1+E[R_i]+b_{i,1}f_1+b_{i,2}f_2$
F_1ファクターP	売り	$b_{i,1}$	$-b_{i,1}$	$-b_{i,1}\left(1+E[R_{F_1}]+f_1\right)$
F_2ファクターP	売り	$b_{i,2}$	$-b_{i,2}$	$-b_{i,2}\left(1+E[R_{F_2}]+f_2\right)$
		合計	$1-b_{i,1}-b_{i,2}$	$1+E[R_i]-b_{i,1}E[R_{F_1}]-b_{i,2}E[R_{F_2}]$ $-b_{i,1}-b_{i,2}$

ここで、3 つの取引を加えると（合計の行)、ここにはもはや確率変数 f_1、f_2 はなく現れる変数はすべて確実なものになるから、このキャッシュ・フローはファクターがどのような値をとろうとも必ずこの値をとる。つまり、一定額の投資に対し、一定額のキャッシュ・フローが必ず実現することを意味する。これは無リスク資産の運用に他ならない。投資家には無リスク利子率がわかっているので、このポートフォリオ全体の収益率は無リスク利子率に等しくなる。つまり、投資額に $1+R_f$ をかければ期末キャッシュ・フローになっているはずである。そうでなければ裁定取引が可能になる。したがって、次の式が成り立つ。

$$[1-b_{i,1}-b_{i,2}](1+R_f)=1-b_{i,1}-b_{i,2}+E[R_i]-b_{i,1}E[R_{F_1}]-b_{i,2}E[R_{F_2}]$$

左辺の括弧をはずして整理すると、2 ファクターの場合についての APT の公式が得られる。

APT（2 ファクターのケース）

$$E[R_i]=\underbrace{R_f}_{\text{無リスク利子率}}+\underbrace{\left(E[R_{F_1}]-R_f\right)}_{\substack{\text{第1ファクターの}\\\text{リスク・プレミアム}}}\times b_{i,1}+\underbrace{\left(E[R_{F_2}]-R_f\right)}_{\substack{\text{第2ファクターの}\\\text{リスク・プレミアム}}}\times b_{i,2} \qquad 〔1.6.8〕$$

この式から、APT の主張は次のようにまとめることができる。

> 資産（ポートフォリオ）の期待収益率は、無リスク利子率と、各ファクターのリスク・プレミアムにポートフォリオのファクターに対する感応度をかけたものの合計に等しい。

ここではファクターが 2 個のケースについて導出を試みたが、ファクターが K 個存在する場合へ一般化することもできる。各ファクターのリスク・プレミアムを

$$\lambda_k=E[R_{F_k}]-R_f$$

で定義すれば、以下のように表せる。

APT（一般のケース）

期待収益率	＝	無リスク 利子率	＋（	各ファクターの リスク・プレミアム	×	感応度	）の合計
$E[R_i]$	＝	R_f	＋	$\lambda_1 b_{i,1}+\lambda_2 b_{i,2}+\cdots+\lambda_K b_{i,K}$			〔1.6.9〕

3 ファクターは何か

マルチファクター・モデルないしは APT に従う場合、資産の収益率はファクターのリターンに影響を受ける。

では、ファクターは具体的に何か？

理論モデルとしての APT からは、何を変数とするかは明らかにはならないので、実際に変数として何を選択するかは、分析者によって重要な課題となる。代表的なものとして、APT の提唱者であるロスらによるマクロファクター・モデル、効率的市場仮説で有名なファーマらによる 3 ファクター・モデル、BARRA モデルを代表とするファンダメンタル・ファクター・モデル等がある。

(1) チェン＝ロール＝ロスによるマクロファクター・モデル

ロスらによるマクロファクター・モデルでは、次のようなファクターが取り上げられている。

1. マーケット・ファクター：株式マーケット・ポートフォリオのリターンと無リスク利子率の差
2. GDP ファクター：GDP 変化率の予期せぬ変化
3. インフレ・ファクター：予期せぬインフレ（実際のインフレ率と期待インフレ率の差）
4. タームプレミアム・ファクター：長短金利差の予期せぬ変化
5. 投資家心理ファクター：信用リスク・プレミアムの予期せぬ変化

(2) ファーマ＝フレンチによる3ファクター・モデル

米国市場では 1930 年代以降、小型株（株式時価総額の小さい銘柄群）のリターンが大型株（株式時価総額の大きい銘柄群）のリターンを上回るということが 1980 年代に入って報告された。この小型株の超過リターンは、とりわけ 12 月～1 月にかけて見られ、同様の超過リターンがバリュー株（PBR の低い銘柄群：割安株）についても観察された。いわゆる、規模効果（小型株効果）、バリュー株効果（低 PBR 効果）と呼ばれるアノマリーである。アノマリーとは、効率的市場仮説（EMH）に反する変則性のことであり、金融市場にみられるある種の傾向で、合理的な理由のはっきりしないものを指す。

現代ファイナンスは、すべてのリターンはリスクで説明するというフレーム・ワークであるため、ファーマ（Fama, E.）は、「市場」を唯一のリスク・ファクターとする CAPM ではリスク要因の特定が不十分であり、小型株やバリュー株への投資を小型株リスク（サイズ・ファクター）、バリュー株リスク（バリュー・ファクター）としてモデルに取り込むことで、このアノマリーに関する問題を処理した。これが、ファーマ=フレンチ・3 ファクター・モデルである。小型株やバリュー株は、倒産リスクが高く取引量も少ないので、これを財務リスクと流動性リスクとしている。

アナリスト試験では、「市場（MKT）」を唯一の説明変数とするマーケット・モデルによる単回帰分析の結果

$$r_i - r_f = a_i + \beta_{i,MKT}(r_{MKT} - r_f) + e_i$$

と、「市場（MKT）」に加えて「サイズ（SMB）」および「バリュー（HML）」の 3 つの説明変数を使ったファーマ=フレンチ・3 ファクター・モデルによる重回帰分析の結果

$$r_i - r_f = a_i + \beta_{i,MKT} f_{MKT} + \beta_{i,SMB} f_{SMB} + \beta_{i,HML} f_{HML} + e_i$$

を対比・吟味するパターンがみられる。

ただし、r_f：無リスク利子率、$\beta_{i,MKT}$：証券 i のマーケット・ファクターに対するエクスポージャー（定数）、$\beta_{i,SMB}$：証券 i のサイズ・ファクターに対するエクスポージャー（定数）、$\beta_{i,HML}$：証券 i のバリュー・ファクターに対するエクスポージャー（定数）、f_{MKT}：マーケット・ファクター、f_{SMB}：サイズ・ファクター、f_{HML}：バリュー・ファクター、e_i：証券 i の固有リターンの変動部分（残差）。

3 ファクター・モデルの各説明変数（リターン格差）は以下の通り。

$$f_{MKT} \equiv r_{MKT} - r_f$$
$$f_{SMB} \equiv r_{Small} - r_{Big}$$
$$f_{HML} \equiv r_{High} - r_{Low}$$

ただし、r_{MKT}：市場ポートフォリオ（株式インデックスで代理）のリターン、r_{Small}：小型株のリターン、r_{Big}：大型株のリターン、r_{High}：高 BPR（バリュー）株のリターン、r_{Low}：低 BPR（グロース）株のリターン。なお、BPR（簿価時価比率）＝ PBR の逆数。

(3) カーハートの4ファクター・モデル

カーハート（Carhart,M）は、②の 3 ファクターにモメンタム・ファクター（リターン・リバーサル／モメンタム）を加え、「4 ファクター・モデル」に拡張している。

$$r_i - r_f = a_i + \beta_{i,MKT} f_{MKT} + \beta_{i,SMB} f_{SMB} + \beta_{i,HML} f_{HML} + \beta_{i,MOM} f_{MOM} + e_i$$

ただし、f_{MOM}：モメンタム・ファクターのプレミアム

米国では 3 年から 5 年といった長期のリターンをみると、過去のパフォーマンスがよかった（悪かった）ポートフォリオは次の 3 年から 5 年ではパフォーマンスが悪くなる（よくなる）傾向、つまりリターンに「負の系列相関」が観察される（リターン・リバーサル）。また、6ヵ月といった短期についてはリターンによいパフォーマンス（悪いパフォーマンス）が続く傾向、つまりリターンに「正の系列相関」が観察される（モメンタム）。

モメンタム・ファクターの作成方法は、例えば、株式の過去 1 年間のリターン（厳密にはリターン計測直前の過去 1 ヵ月を除く 11 ヵ月）に基づいて、銘柄を 3 つのグループ・ポートフォリオに分割し、最もリターンの高かったグループ・ポートフォリオのリターンから最もリターンが低かったグループ・ポートフォリオのリターンを差し引き、その値をファクター値として用いる。

この「モメンタム・ファクター」を前提とすると、
・モメンタム・ファクターのエクスポージャーがプラスの場合
　　直前年間のリターンが高かった銘柄をオーバーウェイト
　　（モメンタムにティルトした運用）
・モメンタム・ファクターのエクスポージャーがマイナスの場合
　　直前年間のリターンが低かった銘柄をオーバーウェイト
　　（リターン・リバーサルにティルトした運用）
となる。

(4) ファンダメンタル・ファクター・モデル

取り上げたマクロファクター・モデルやファーマ＝フレンチの 3 ファクター・モデル（あるいはカーハートの 4 ファクター・モデル）の他に、企業規模、財務比率等の財務データや業種その他の銘柄属性をファクターとするモデルが実務的には最もよく用いられている。こうしたモデルはファンダメンタル・ファクター・モデルと呼ばれ、BARRA 社によるモデルはその代表例と言われている。

ファンダメンタル・ファクター・モデルにもとづいて分析を行う場合、銘柄属性をファクター感応度として用い、ファクター・リターンを推定することになる。この点で、ここまでで取り上げたファーマ＝フレンチ・モデル等がファクター・リターンを説明変数として、ファクター感応度を回帰分析によって求めていったのとは異なり、ファクター感応度をあらかじめ決定したうえでファクター・リターンを求めるものになっている。

7　スタイル・マネジメント　☆☆

スタイル・マネジメントは、基本的にはマルチファクター・モデルの問題と同じである。マルチファクター・モデルにおいてはファクターとして GDP やインフレ率などが使われたが、ここでは「大型成長株」あるいは「小型株」といったものを使う。またスタイル分析では、その「スタイル」が運用の巧拙や得手不得手を示すが、これもマルチファクター・モデルで出来ないということではなく、あまり問題とされていないにすぎない。いずれにせよ、とくに新しい概念や考え方が要求されているわけではない。

1　スタイル・マネジメントの考え方

投資家が「市場は完全に効率的ではない」と考えているとき、複数の運用担当者に同様の条件で運用を委託する場合と、複数の担当者にそれぞれ異なるセクターで運用を委託する場合とでは、大きな違いがあろう。その違いは、端的に言えば運用担当者間のリスク分散効果である。また、運用担当者によって得意なセクター、不得意なセクターがあるとすれば、それぞれの運用担当者を得意分野に特化して運用を委託することにより、より高いアルファを期待できる。さらに、各セクターおよび運用担当者へのアロケーションは、市場全体の時価総額加重平均とし、かつすべての証券がいずれかのセクターでカバーされるようにすれば、全資産ベースのリスクは市場ポートフォリオ並の水準であろう。したがって、スタイルによる分散投資を行うことにより、より低いリスクとより高いリターンが同時に期待できる。これがスタイル・マネジメントの基本的な考え方である。

2 スタイルの分類

ここでいうスタイルやセクターは、前述の条件を満たしていれば理論的にはどのような分類でも構わないが、セクター間の相関はあまり高くないことが望ましい。実際にはおおよそ次の3つのカテゴリーに分割される。

・大型割安（バリュー）株（LV：Large Value）

・大型成長（グロース）株（LG：Large Growth）

・小型株（S：Small）

こうした「分類」というのは、時間の経過や一般化の進展に伴って細分化してゆく傾向にある。最近では小型株を「小型割安株」と「小型成長株」とに分けたり、「中型割安株・中型成長株」や「外国株」といったカテゴリーを加えたりすることもあるようだが、基本は前記の3分類である。市場全体（ex.TOPIX）を3つ程度のカテゴリーに分割しておき、各カテゴリーを得意とする運用担当者に、市場と同じウェイトで運用を委託する。

3　シャープのスタイル分析

運用成績は、パフォーマンスと事前に決めておいたスタイルとの整合性という 2 点で検証される。事前のスタイルとの整合性は「スタイルによる分散化」を実現するために不可欠である。基本 3 分類に従えば、大型割安株インデックス、大型成長株インデックス、小型株インデックスという具合に、各スタイルについてインデックスを作成する。運用結果をそれぞれが対応するインデックスで回帰させ、運用期間中のポートフォリオ収益率の動きがどの程度そのスタイル・インデックスで説明できるか、またインデックスに対するポートフォリオの感応度（エクスポージャー）などがチェックされる。

スタイル分析の手法としてはさまざまなものが考えられるが、協会通信テキストでは W. F. Sharpe による以下の方法が紹介されている。これによれば、各スタイル・インデックスのリターンを説明変数、評価対象ポートフォリオのリターンを被説明変数として、以下のように回帰する。

$$r_P = b_{LV} r_{LV} + b_{LG} r_{LG} + b_S r_S + e$$

ただし、r_P：ポートフォリオのリターン、r_i：スタイル・インデックスのリターン（$i = LV, LG, S$）、b_i：スタイル i に対する感応度（エクスポージャー）、e：残差。

また、最適化プログラムにより、以下のような制約条件（*s.t.*：*subject to*）を設定する。

s.t.　$\sum b_i = 1.0$　エクスポージャーの合計は 1.0（100%）

$0 \leq b_i \leq 1$　各エクスポージャーは 0 以上 1 以下

上記を満たすエクスポージャー（b_i）が求められれば、それが評価対象ポートフォリオの実質的なスタイル・エクスポージャーとなる。本試験でもスタイル分析については、当初はさまざまな回帰式が扱われたが、近年は上記の回帰式で統一されてきているようである。

モデルの説明力については決定係数（R^2）といった統計量が使用され、パフォーマンスに関しては、いわゆるアルファ値や情報比といった指標が用いられる場合が多いようである。事前に「大型割安株で運用する」と決めておいたにもかかわらず、小型株の説明力や感応度が安定的に高く、逆に大型割安株の説明力が低い場合、投資政策と異なる投資行動をとったことになる。また、投資政策と整合的であったとしても情報比が低い場合、スタイルには沿ったものの運用に失敗したことになる。

なお、こうしたスタイル分析には次のような長所・短所がある。

長所：パフォーマンス分析対象となっているポートフォリオのスタイルが、当初の意図に沿ったものとなっているのかを客観的に検証することが可能である。

短所：推計期間における平均的なスタイル・エクスポージャーを測定しているために、推計期間中において意図的なスタイル変更があると、分析結果の信頼度が大きく低下する可能性がある。

８　株式ポートフォリオの運用　☆☆☆

通常資産運用は**パッシブ運用**と**アクティブ運用**に大別されている。パッシブ運用は効率的市場仮説に基づき、市場を上回るパフォーマンスをあげる方法はない、という考え方を基本としており、市場ポートフォリオやその代用に投資する。アクティブ運用は効率的市場仮説について全く意識しないか、または市場を上回るパフォーマンスをあげることが可能であるという考えに基づいて行われる。

1　ベンチマーク

(1)　ベンチマーク

ベンチマークとは、本来、測量において利用する水準点を示す言葉だが、これが転じて投資や資産運用などにおいて比較のために用いる「指標」の意味で使われている。

● ベンチマークに必要な条件

ベンチマークとなるインデックスには次のような性質が要求される。

良いインデックスの条件

項目	内容
完全性	投資対象とする市場の時価総額、国のカバレッジ、企業の組み入れ等の投資機会全体を正確に反映していること
投資可能性	実際に組み入れ可能な銘柄でインデックスが構築されていること（例：海外資産では外国人投資家が投資できない銘柄が除外されていること）
明確で公表されたルールと公明なガバナンス	銘柄入れ替えルールなどインデックス構築方法が公表され、ルールに透明性があること
正確で完全なデータ	リターンおよび構築銘柄に関するデータが正確、完全で即座に利用可能なこと
投資家による支持	インデックスが広く認知され、標準的に利用されていること
リバランス取引の流動性	指数ポートフォリオのリバランスにおいて、流動性があり取引コストが低い取引手段があること
低い回転率と取引コスト	構成銘柄入れ替えの回転率が低く、インデックスに追随するための取引コストが抑えられていること

（出所）ショーンフェルド編「アクティブ・インデックス投資」の第 6 章をもとに作成

日本株の運用では、広く認知されている「株式インデックス（株価指数）」をベンチマークとすることが多い。古くから存在する代表的なものとして、日経平均株価（日経 225）、東証株価指数（TOPIX）がある。それぞれの特徴は、以下の通り。

日経平均株価（日経 225）	東証株価指数（TOPIX）
・単純平均：東証 1 部上場の 225 銘柄を対象とし、その株価合計を恒常除数で割って算出。単位は（円）。 ・指数の構成は、採用銘柄の上場廃止や合併などを反映するため、変更される。 ・銘柄の流動性の変化や、業種ウェイトのバランス調整のため、定期的に見直される。 ・株式数で加重平均しておらず、値がさ株・品薄株・小型株の影響を受けやすい。	・時価総額加重平均：1968 年 1 月 4 日を基準とし、東証 1 部上場全銘柄について、その基準時の時価総額を 100 として、その後の時価総額を指数化したもの。単位は（ポイント）。 ・時価総額と流動性の高い大型株の影響を受けやすい。 ※東京証券取引所の「市場第 1 部（いわゆる東証 1 部）」をはじめとする市場区分は、2022 年 4 月に「プライム市場」「スタンダード市場」「グロース市場」の 3 市場に再編された。旧東証 1 部全銘柄で構成されていた株式インデックス「東証株価指数（TOPIX）」は、2025 年1月末に見直しの第1段階が終了し、構成銘柄は約 1,600 銘柄に減少した。さらに、第2段階の見直しにより、その構成銘柄は約 1,200 銘柄となる予定。

さらに、こうした伝統的な株価指数に加え、JPX 日経インデックス 400（JPX 日経 400）といった指数もある。

日本株運用において何をベンチマークとするかは、詰まるところ運用の目的や方針次第なのだが、とくに年金運用においては TOPIX をベンチマークとする場合が多いようである。

CAPM の言う「市場ポートフォリオ」は、市場に存在するすべてのリスク資産の時価加重ポートフォリオであり、リスク資産のみで構成される唯一の効率的ポートフォリオという性質をもつ。この意味では、少なくともリスク資産を旧東証 1 部上場株式に限定して考えると、TOPIX は市場ポートフォリオとしての性質を強く備えている。このため、資本市場理論を現実の世界に当てはめて考える場合、TOPIX を市場ポートフォリオに代理させることがある。上記の「適切なベンチマークの要件」に加え、こういった理論上の背景もあってか、年金基金をはじめ機関投資家の多くが、日本株のベンチマークとして TOPIX を採用しているようだ。

(2) 投資ユニバース

投資ユニバースとは、ポートフォリオに組み入れる候補となる銘柄の集まりのことである。したがってベンチマークが設定されれば、投資ユニバースはベンチマークの構成銘柄に一致させるのが基本である。しかし、たとえば TOPIX（東証株価指数）をベンチマークとした場合、その構成銘柄すべてを投資ユニバースとすることは現実的でなく、また広ければ広いほどよいというものでもない。以下のように、状況によってベンチマーク構成銘柄よりも狭いユニバース設定が合理的な場合がある。

① 流動性：ポートフォリオ構成銘柄の購入やリバランス（配分比率の変更、銘柄の入れ替え）時の取引コストなどを勘案し、流動性の高い銘柄だけを投資対象とする。

② 情報の入手可能性：投資の意思決定に必要な情報が質・量ともに十分に入手できるか否かという観点から、証券会社や運用機関などが対象にしている数百程度の銘柄に限定する。

③ リスク管理：倒産など特定のリスクが高い企業の株式を除外する。

2　パッシブ運用

パッシブ運用とは、特定のベンチマークのリスクとリターンを再現することを目的とする運用であり、ベンチマークは市場インデックス、あるいはそのサブ・インデックスの中から選ばれる。インデックスは市場全体の動きを代表するものという特性上、得られるリターンも平均的なものになる。

(1) パッシブ運用の合理性

あえてベンチマークを上回るアクティブ・リターンを狙わず、当初から平均的なリターンを目標とする理由として、以下のようなことが指摘される。

①　CAPMの存在

CAPMによれば、リスク資産のポートフォリオとしては真の市場ポートフォリオのみが効率的ということになる。真の市場ポートフォリオが特定不可能であるとしても、株式市場の大部分の銘柄で構成される市場インデックスであれば、真の市場ポートフォリオに近似できると考えられる。したがって、市場インデックスをベンチマークとし、このリターンを再現することが最も効率的な運用となる。

②　実証分析結果の影響

市場インデックスに勝ち続けたファンドが存在せず、多くのファンドがインデックスを下回るパフォーマンスしか上げられていないという実証分析結果の影響が考えられる。

アクティブ運用によりインデックスを上回るには、市場の上昇に追随し下落を回避するといったタイミング能力や、アルファ（アクティブ・リターン）の獲得が期待できる銘柄の選択能力が必要となり、情報入手・分析、意思決定、売買執行に伴う運用コストがパッシブ運用に比べ高くなる。こういったコストをかけてもインデックスを上回ることが困難であるならば、はじめからインデックスと同じ結果を狙うべきである。

(2) パッシブ運用の手法

前述の通り、パッシブ運用とは特定のベンチマーク、つまり特定のインデックスのリスクとリターンを再現することを目的とする運用であり、このように設計されたポートフォリオをインデックス・ファンドと呼ぶ場合がある。パッシブ運用におけるポートフォリオの構築方法について、協会通信テキストでは、**a)完全法**、**b)層化抽出法**、**c)最適化法**、をとり上げている。

a)　完全法

ベンチマークに含まれるすべての銘柄をベンチマークと同じウェイトで組み入れ、アクティブ・ウェイトをゼロにする。ベンチマークの構成に異動があった場合には、それに応じて銘柄の入替えやウェイト調整を行って、アクティブ・ウェイトをゼロに維持し続ける。

極めて単純で、ポートフォリオの構築・メンテナンスができれば確実性が高いが、実際には困難である。以下のような事柄がトラッキング・エラーを増加させ、とくに取引コストはパフォーマンスの劣化を引き起こすためである。

①　市場インデックスは、その計算において取引コストが考慮されていないが、実際にはポートフォリオ構築の段階で取引コストが発生する。

②　流動性などの問題から、売買価格がベンチマークの計算に用いられる価格とは必ずしも一致しない。

③　最低取引単位でしか売買できないためベンチマークでの正確なウェイト通りの売買は困難である。

④　ベンチマークの構成銘柄に異動が起こった場合、あるいは資本異動などによりベンチマークにおけるウェイトが変化した場合、ポートフォリオのリバランス（ウェイト調整）を行う必要があるが、その度に売買価格と計算価格の不一致や取引コストが発生する。

上記の理由から、完全法によるパッシブ・ポートフォリオの構築は非常に困難である。このため、実際には下記の b)層化抽出法と c)最適化法のように、ベンチマーク構成銘柄の中から一部だけを取り出してポートフォリオを構築する。

b)　層化抽出法

ベンチマーク構成銘柄をリターンを特徴づける特性を基準に、いくつかの部分集合に分割する。次に各部分集合からその集合の動きを代表する銘柄を抽出し、各部分集合の時価総額に応じた額だけポートフォリオに組み入れる。

c)　最適化法

ポートフォリオの銘柄構成比率がベンチマークとは異なるためトラッキング・エラーが生じるが、これをゼロに近づけることによりポートフォリオをインデックスに近似させる方法。パラメータの数を絞り込んだファクター・モデルを使って、数理計画法によりトラッキング・エラーを最小化する最適ポートフォリオを導く。

3 アクティブ運用

アクティブ運用とはベンチマークのリターン・リスクからの意図的な乖離をとり、ベンチマークを上回るパフォーマンスを目指す運用スタイルを指す。これにより、運用に追加的な価値を実現する。具体的には、ポートフォリオのセクター・ウェイトや銘柄構成比をベンチマークから乖離させる。ベンチマークから乖離したリターンを**アクティブ・リターン**、リスクを**アクティブ・リスク（トラッキング・エラー）**と呼び、ベンチマークから乖離したセクター・ウェイトや銘柄構成比を**アクティブ・ウェイト**と呼ぶ。

(1) 銘柄選択およびアクティブ・ポートフォリオの構築

① トップダウン・アプローチ

1)マクロ経済の現況や動向について調査・分析を行い、将来のシナリオを策定する。2)このマクロ・シナリオに基づいて、業種などのセクターごとにオーバー・ウェイト、アンダー・ウェイトの方針を立てる。3)各セクターについて組入れ銘柄を選定する。

② ボトムアップ・アプローチ

1)個別企業の財務・経営状態、および将来の収益動向を調査・分析する。2)このファンダメンタル分析に基づいて投資価値（アルファ:超過収益率）を評価する。3)高いアルファが期待できる銘柄でポートフォリオを組成し、組み入れ候補銘柄の多いセクターがオーバー・ウェイト、少ないセクターがアンダー・ウェイトとなる。

(2) アクティブ戦略の類型

① 個別銘柄選択

実際の株価が理論株価を下回る割安な銘柄でポートフォリオを構成する。市場リスクを源泉とせず、組み入れ銘柄の固有の超過リターンを狙う。

② サブ・インデックス

特定のサブ・インデックス（バリュー株／グロース株、大型株／小型株、ハイテク株セクターなど）をベンチマークとしたパッシブ運用。

③ マクロ・ファクター

マクロ・ファクター・モデルに基づいた戦略（トップダウン・アプローチ)。

1)　サブ・インデックスの動的（ダイナミック）アロケーション。

2)　マクロ経済ファクター・リターンに基づいて、各ファクターの最適エクスポージャーを推定し、ポートフォリオを組成する。

④　マーケット・タイミング

ポートフォリオのベータ（β）を相場見通しに基づいて動的（ダイナミック）に調整する。相場上昇を予想する場合はベータを高め、相場下落を予想する場合はベータを低くする。

⑤　セクター・ローテーション

各セクターへのウェイトをベンチマークのウェイトから意図的に乖離させる。マクロ経済動向の予測に基づいて、セクターごとにオーバー・ウェイト、アンダー・ウェイトの方針を立てる。

⑥　ファクター・ローテーション

その時々に有効性の高い投資尺度（PER、PBR など）へのウェイトを高める。ファンダメンタル・ファクターを用いたものが多い。

⑦　スタイル・ローテーション

「投資スタイル」を何らかの基準によって変更する。マクロ経済動向の予測に基づいて、スタイル・インデックスへの配分比率を調整する。

(3) スマートベータ戦略

スマートベータ戦略は、市場ポートフォリオに対する追加的な超過リターンを、個別銘柄の選択ではなく、特定のファクターを選択することで獲得しようとする戦略のことを言う。この特定のファクターに対しエクスポージャーを持つように構成されたポートフォリオは、スマートベータ指数と呼ばれている。

①　スマートベータの種類と運用

スマートベータ指数には様々な種類が見られる。主要なスマートベータ指数としては、

・バリュー　・サイズ　・モメンタム

といった3ファクター・モデルや4ファクター・モデルに含まれるファクターや、

・低ボラティリティ（ボラティリティが低い株式の超過リターン）

・クオリティ（低債務、安定利益成長の企業の株式の超過リターン）

・高配当利回り

などが、開発・提供されている。

なお、スマートベータ型ファンドはスマートベータ指数に対するパッシブ運用が行われるため、ETF との親和性が高く、日本においてもスマートベータ型 ETF が複数上場している。

スマートベータ指数は TOPIX に代表される市場時価総額型インデックスをアウトパフォームすることを意図して設計・開発されていると考えられる。この意味でスマートベータ指数そのものが、アクティブ運用プロダクト的な側面をもつ。また、どのようなファクターを選択するのか、すなわち何がスマートベータなのかについては、投資家が選択するものであり、その選択自体が市場ポートフォリオに対するアクティブ運用を行っていることになる。

他方、スマートベータ戦略はスマートベータ指数に連動させる運用であり、さらにパフォーマンス評価に用いるベンチマークが連動対象のスマートベータ指数あれば、これはあくまでもパッシブ運用であると考えられる。

②　「スマートベータ」のコスト、パフォーマンス

年金基金などが実際に「スマートベータ」を活用するにあたり、コストやパフォーマンスに関して以下のような注意が必要とされる。

● 運用委託コスト

スマートベータ戦略をとるファンドがパッシブ運用であれば、アクティブ運用にくらべて運用報酬は低く抑えられるが、頻繁なリバランスが必要となる場合が多いと考えられる。通常のアクティブ運用であれば、あらかじめ売買回転数について制約を設けることも可能だが、スマートベータ戦略では指数にトラックさせることが目的となるので、売買回転数の上昇は不可避である。これが取引コストを上昇させ、運用委託コストが予想外に高くなる可能性がある。

● スマートベータ・インデックス、ファンドの選定等に関するプロセス

1)　どのようなスマートベータ・インデックスを採用するか
2)　各スマートベータ・インデックスへの資金の配分比率
3)　ファンド（運用会社）の選定
4)　運用実績の評価および配分比率の見直し

こうした問題に対処するため、調査・分析など新たなプロセスが必要となり、パッシブ運用として直接の運用報酬は抑制されても、総コストはさほど減らない可能性がある。

● スマートベータ指数のアクティブ運用的な側面

ベンチマークとして TOPIX に代表される市場時価総額型インデックスが採用され、パッシブ運用が支持される大きな理由として、以下のふたつがあげられる。

1)　「市場ポートフォリオ」が最適リスク資産ポートフォリオであるとする CAPM の存在
2)　長期にわたって安定的に市場時価総額型インデックスを上回るパフォーマンスを実現したアクティブ運用はごく少数であるという実証分析結果

スマートベータ・インデックスがアクティブ運用的な側面を備えている以上、2) の実証分析が報告する結果と似た状況になる可能性がある。

９　売買執行のリスクとコスト　☆☆

実際に証券の売買を行う場合、取引コストが問題となる。ここでは、株式の取引システムと執行方法、取引コストとその分解について取り上げる。

1　取引システムと執行方法

日本の上場銘柄は個別競争取引（オーダードリブン型）で取引されている。そこでは、買いでは高い値段をつけた注文が、売りでは低い値段をつけた注文が優先される**価格優先の原則**が、同じ値段であれば先に発注された注文が優先される**時間優先の原則**が適用されている。また、1998 年 12 月に上場株式の取引所集中義務が撤廃されたことから、上場株式についても様々な執行形態が採られるようになった。

ここでは執行方法をいくつかに分類してその特徴について見ていく。

(1)　指値注文と成行注文

	指値注文	成行注文
方　法	売買の際、売りたい値段、買いたい値段を指定する注文。	売買の際、売りたい値段、買いたい値段を指定しない注文。
特　徴	自分で値段を指定できるので想定外の約定価格がつくことはないが、売買相手となるのに適当な注文がなければ、約定のつかないリスク（**機会コスト**）がある。	値段を指定しないため早く確実に注文を執行したいとき有利だが、大口注文により市場価格が変動し、約定価格が最良気配より不利な水準になるリスク（**マーケット・インパクト**）がある。

※最良気配

最良売気配（ベストアスク）：売指値注文の中で最も低い指値価格

最良買気配（ベストビッド）：買指値注文の中で最も高い指値価格

(2)　一括執行と分割執行

	一括執行	分割執行
方　法	売買予定株数の執行を一度に行うこと。	売買予定株数の執行を時間をあけて分割して行うこと。
特　徴	機関投資家のような巨大運用機関が一銘柄に大量の注文執行を一括で行うと、マーケット・インパクトが発生しやすい。	マーケット・インパクトは小さくできるが、時間の経過による価格変動リスク（**タイミング・リスク**）を負うことになる。

2 取引コストとその分析

取引コストには委託手数料以外にも様々なコストが含まれる。それを分析、評価する方法として、インプリメンテーション・ショートフォール（IS）法と、簡便法として、VWAP 法を取り上げる。

(1) インプリメンテーション・ショートフォール（IS）法

IS 法では、売買計画とその実行結果の乖離をコストとして捉え、それを要因分解していく。取引コストは例えば次のように要因分解できる。

<table>
<tr><th></th><th></th><th colspan="2">種　類</th><th>意　味</th><th>計算式</th></tr>
<tr><td rowspan="5">取引コスト</td><td>明示的コスト</td><td colspan="2">委託手数料
税金</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">潜在的コスト</td><td colspan="2">スプレッドコスト</td><td>ビッド（売手にとっての最良気配）とアスク（買手にとっての最良気配）の差をビッド・アスク・スプレッドといい、スプレッドが大きい証券は取引コストが大きくなる。</td><td>(執行前)最良売気配
－(執行前)最良買気配</td></tr>
<tr><td colspan="2">マーケットインパクト</td><td>投資家の注文サイズが大きいとき、その注文が市場価格に影響を与え、その時点の最良気配値を超えた価格で約定することがある。これをマーケットインパクトと呼ぶ。</td><td>買い注文時：
約定価格
－(執行前)最良売気配値
売り注文時：
(執行前)最良買気配値
－約定価格</td></tr>
<tr><td rowspan="2">機会コスト</td><td>タイミングコスト</td><td>投資意思決定をしてから注文執行を行うまでの時間の経過に伴う価格変動コスト。通常、前日終値から執行タイミングまでの価格変化を指す。</td><td>買い注文時
(執行前)最良買気配
－参照価格
売り注文時
参照価格
－(執行前)最良売気配</td></tr>
<tr><td>遅延コスト</td><td>マーケットインパクトを回避するため大口注文を小口に分割して発注すると、発注に遅延が生じて価格が変化するリスクがある。これを遅延コストと呼ぶ。</td><td>買い注文時
(遅延注文執行前)最良買気配
－参照株価
売り注文時
参照株価
－(遅延注文執行前)最良売気配</td></tr>
</table>

このように機会コストを含めて取引コストを要因別に分解し、それを総合的に把握しようとするのがインプリメンテーション・ショートフォール法の特徴である。なお、マーケットインパクトと機会コストはトレードオフの関係にあるため、執行コストを管理する上では、そのバランスを確認することが重要である。

●QUESTION

IS 法によるトータルコストを計算しなさい。

Z 社株の購入計画と執行結果は以下のとおりで、執行は別々のタイミングで 2 回行われ、手数料は 0.2%であった。

Z 社株の購入計画と執行結果	
参照価格（円）	400
購入株数（株）	50,000

	約定株数	始値	最良売気配	最良買気配	平均約定価格
執　行 1	30,000	405	406	405	405.5
執　行 2	20,000	404	405	403	407

●ANSWER

スプレッドコスト＝(執行前)最良売気配－(執行前)最良買気配

＝30,000×（406－405）＋20,000×（405－403）＝70,000

マーケットインパクト＝約定価格－(執行前)最良売気配

＝30,000×（405.5－406）＋20,000×（407－405）＝25,000

タイミングコスト＝（執行 1 の前）最良買気配－参照価格※

＝30,000×（405－400）＝150,000

遅延コスト＝（執行 2 の前）最良買気配－参照価格※

＝20,000×（403－400）＝60,000

※参照価格：前日終値の 400

手数料＝約定代金×手数料率

＝（30,000×405.5＋20,000×407）×0.002＝40,610

以上より、

トータルコスト＝70,000＋25,000＋150,000＋60,000＋40,610

＝345,610

トータルコストは、実際の執行価格と手数料の合計金額と、ペーパーポートフォリオの購入金額の差として計算することもできる。なお、ペーパーポートフォリオの購入金額とは、ポートフォリオの銘柄入れ替えを決定したときの市場価格（＝参照価格）で、マーケットインパクト、手数料なしで即時執行完了したと仮定して計算した価格をいう。

①実際の執行価格＋手数料　　　　＝20,305,000＋40,610＝20,345,610

②ペーパーポートフォリオの購入金額＝50,000×400＝20,000,000

①－②（＝トータルコストと一致）　＝20,345,610－20,000,000＝345,610

（2）VWAP法

執行コストの評価を行う方法として、VWAP を評価指標に用いる方法がある。

VWAP（Volume Weighted Average Price）とは、当日のすべての約定価格それぞれの約定株数をウェイトとして平均した価格のことである。

VWAP 取引は、その日の VWAP に近い価格で執行を依頼する注文を言う。VWAP 取引には以下の種類がある。

・VWAPギャランティ取引

VWAP価格での執行を保証し、証券会社が自己のポジションで引き取る取引で、一般的に手数料が高くなる。

・VWAPターゲット取引

できる限りVWAP価格に近付ける努力をする取引であり、乖離率の小さい証券会社を選ぶなどの必要がある。

第2章

パフォーマンス評価

この章のポイント

この章は、株式ポートフォリオ戦略（第１章）の隣接論点です。収益率の尺度の中心は、1 次でも扱われた金額加重収益率と時間加重収益率。リスク調整後収益率測度では、これも１次でお馴染みのシャープレシオ、トレイナーレシオ、ジェンセンのアルファに加え、2 次レベルではインフォメーション・レシオ（情報比）がよく使われます。実務では、ベンチマークが明確にされてこなかった投資信託のトラックレコードはシャープレシオ、ベンチマークのはっきりしている年金運用のトラックレコードは情報比といった使い分けがなされているようです。また、「補論」を参考に、ファクター・モデルでも取扱った回帰分析や回帰係数の読み取り方などをみてゆきます。

1　収益率の尺度　☆☆

資金運用の最終的な目標は、設定した運用目標を達成することにある。パフォーマンス評価は実際の運用が当初の目的に沿って行われ、その目的が達成されたかをチェックする。同時に将来、運用成績を向上させるため、個々のファクターがパフォーマンスにどのように影響を与えたかを分析する情報も提供する。

パフォーマンス評価においては２つの収益率概念、**金額加重収益率**と**時間加重収益率**が重要である。

1　金額加重収益率（内部収益率）

金額加重収益率（dollar-weighted rate of return）とは内部収益率のことであり、「期末のポートフォリオ価額と期中におけるポートフォリオからの引出額の現在価額の和を、期初のポートフォリオ価額と期中におけるポートフォリオへの拠出額の現在価額の和に等しくするような収益率」であり、次式で表される。

金額加重収益率（r_D）

$$V_0+\frac{C_1}{(1+r_D)^{t_1}}+\frac{C_2}{(1+r_D)^{t_2}}+\cdots+\frac{C_{n-1}}{(1+r_D)^{t_{n-1}}}=\frac{V_n}{(1+r_D)^{t_n}}$$

$$V_0+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{C_i}{(1+r_D)^{t_i}}=\frac{V_n}{(1+r_D)^{t_n}}$$

ただし、V_0：測定期間の期初におけるポートフォリオ価額
C_i：測定期間中、i 番目に発生したキャッシュ・フロー
（ポートフォリオへの資金追加はプラス、資金引出はマイナスの値）
V_n：測定期間の期末におけるポートフォリオ価額
t_i：期初から i 番目のキャッシュ・フロー発生時までの期間
t_n：測定期間

金額加重収益率は、ポートフォリオを構成する証券の期初と期末の価格水準だけでなく、キャッシュ・フロー発生のタイミングの影響も受ける。２つのポートフォリオが同一のポートフォリオ構成をとっていても、キャッシュ・フローのパターンが等しくない限り、内部収益率は異なってくる。このため、**金額加重収益率はポートフォリオそのもののパフォーマンスの評価には適しているが、ファンドマネジャーの運用能力を評価するには適していない**といわれる。なぜならキャッシュ・フローはファンドマネジャーが直接管理できず、彼の権限外のことだからである。

2　時間加重収益率

時間加重収益率（time-weighted rate of return）とは、期中のキャッシュフローが発生するたびにポートフォリオの市場価値を計算し、それにもとづいて算出した幾何平均収益率のことをいう。

時間加重収益率（r_T）

$$r_T=\left[\frac{V_1}{V_0}\times\frac{V_2}{V_1+C_1}\times\cdots\times\frac{V_n}{V_{n-1}+C_{n-1}}\right]^{\frac{1}{t_n}}-1$$

ただし、V_0：測定期間の期初におけるポートフォリオ価額
V_i：i 番目のキャッシュ・フロー発生直前のポートフォリオ価額
（$i=1, 2, \cdots, n-1$）
C_i：測定期間中、i 番目に発生したキャッシュ・フロー
（ポートフォリオへの資金追加はプラス、資金引出はマイナスの値）
V_n：測定期間の期末におけるポートフォリオ価額
t_n：測定期間

時間加重収益率はキャッシュ・フローや単位期間の収益率の順序の影響を中立化させており、**ファンドマネジャーの運用成績を測定するのに適している**といわれる。

しかしながら、金額加重収益率と比べて見ればわかるように、資金拠出や資金引出ごとにポートフォリオ価額を知る必要があり、その意味で実際上の計算には多大の困難が伴う。

２　リスク調整後収益率測度　☆☆☆

実際に運用が行われたあと、その運用が満足すべきものかそうでないかを測り、運用者の報酬を決めたり、その後の運用の再検討を行ったりする必要がある。これまでの考え方に基づけば、リスクとリターンの間にはトレードオフがあり、投資家はリスクが高ければ高い収益率を得なければ満足せず、逆に低い収益率でもリスクが十分に低ければ満足することがあるといえる。リターンの測定については前述のような各種の方法があり、目的にあったものを使う必要があった。一方リスクについてもいくつかの測り方がある。このためリスクを考慮した収益率（リスク調整後収益率）の測り方にも複数の方法が存在する。

以下、さまざまなリスク調整後収益率測度を取り上げるが、そこでのポイントは、

◆リスクを何で測るか？

　ポートフォリオの収益率の標準偏差、ベータ、アクティブ・リターンの標準偏差

◆どういった計算方法でリスク調整をはかるか？

という点に帰着する。

1　さまざまなリスク調整後収益率測度

(1)　シャープの測度

シャープの測度（シャープ・レシオ）は、投資家にとって重要なのは総リスクと考え、ポートフォリオの収益率の標準偏差をファンド全体のリスクの尺度として用いる。

シャープの測度をθ_Sとすれば、次式で計算できる。

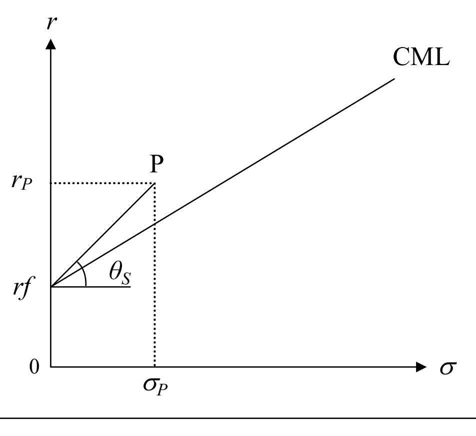
シャープの測度

$$\theta_S = \frac{r_P - rf}{\sigma_P}$$

ただし、r_P　：ポートフォリオの収益率

rf　：無リスク利子率

σ_P　：ポートフォリオの収益率の標準偏差



上式で示されるように、シャープの測度は、負担した総リスク 1 単位当たりの（安全資産に対する）超過収益率であり、この大小によってファンドの優劣を判定する。

グラフ上では、直線 rfP の傾きがシャープの測度を表すので、この傾きが大きくなればなるほど優れたファンドとされる。

(2) トレイナーの測度

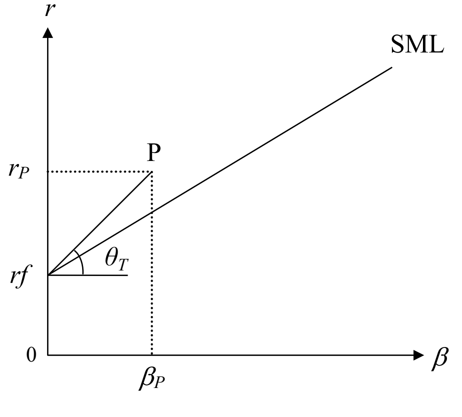
トレイナーの測度（トレイナー・レシオ）は、投資家にとって重要なのは市場関連リスクと考え、ポートフォリオのベータをファンド全体のリスクの尺度として用いる。

トレイナーの測度を θ_T とすれば、次式で計算できる。

トレイナーの測度

$$\theta_T = \frac{r_P - rf}{\beta_P}$$

ただし、r_P　：ポートフォリオの収益率
rf　：無リスク利子率
β_P　：ポートフォリオのベータ値



上式で示されるように、トレイナーの測度は、負担したベータ 1 単位当たりの（安全資産に対する）超過収益率であり、この大小によってファンドの優劣を判定する。

グラフ上では、直線 rfP の傾きがトレイナーの測度を表すので、この傾きが大きくなればなるほど優れたファンドとされる。

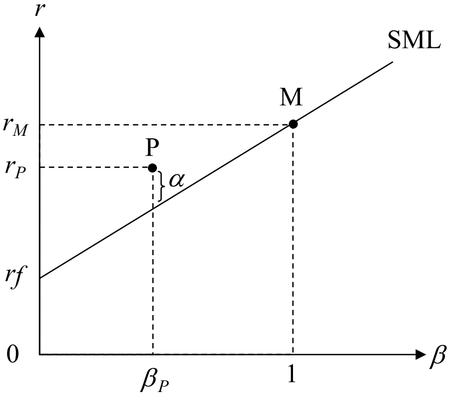
(3) ジェンセンのアルファ

ジェンセンのアルファは、リスクの尺度としてベータを用いる点は、トレイナーの測度と同様であるが、βに対応する事後的な証券市場線（SML）上の収益率との差で、次式のαとして計算される。

ジェンセンのアルファ

$$\alpha = r_P - \{rf + \beta_P (r_M - rf)\}$$

ただし、r_P ：ポートフォリオの収益率
rf ：無リスク利子率
r_M ：市場全体のポートフォリオの収益率
β_P ：ポートフォリオのベータ値



1. 上式のうち $rf + \beta_P (r_M - rf)$ は CAPM に従った場合の当該ポートフォリオに要求される収益率を表している。つまり市場ポートフォリオと安全資産の組合わせによる消極的運用だけで得られる収益で、当該ファンドと同じベータを負担する場合の収益率を示す。
2. 事後的な証券市場線の上方に位置するファンドのジェンセンのアルファはプラスの値をとり、下方に位置する場合はマイナスの値をとる。

ジェンセンのアルファについては、上述の定義に従った算出方法だけでなく、回帰分析結果から読み取ることも可能である。

ポートフォリオの超過収益率 $r_P - rf$ を被説明変数、市場ポートフォリオの超過収益率 $r_M - rf$ を説明変数とする回帰モデル

$$r_P - rf = \alpha + \beta_P (r_M - rf) + \varepsilon$$

ただし、ε ：期待値ゼロの撹乱項
α，β_P ：回帰パラメータ

を仮定し、ポートフォリオの収益率等のデータから回帰パラメータの推定を行う。

このとき、αの推定値（$\hat{\alpha}$）がジェンセンのアルファの推定値であることに注意されたい。この点は、上の回帰モデル式で、期待値ゼロの撹乱項を無視して、αについて解けば、

$$\begin{aligned}\alpha &= r_P - rf - \beta_P(r_M - rf)\\ &= r_P - \{rf + \beta_P(r_M - rf)\}\end{aligned}$$

と変形でき、この式はジェンセンのアルファの定義式そのものになることから確認できる。

そして、このように回帰分析結果が使えることから「ポートフォリオのパフォーマンスが優れている」かどうかについて、統計的な仮説検定（t 検定）が可能となる。

(4) インフォメーション・レシオ（情報比）

アクティブ運用のパフォーマンス評価では、インフォメーション・レシオ（Information Ratio，IR）が用いられることが多い。

インフォメーション・レシオ（IR）は、ベンチマークに対する超過収益率であるアクティブ・リターンをアクティブ・リスクで除したものであり、次のように求めることができる。

インフォメーション・レシオ

$$IR = \frac{\alpha}{\omega}$$

ただし、α　：ポートフォリオのアクティブ・リターン
　　　　ω　：ポートフォリオのアクティブ・リスク

t 期におけるポートフォリオのベンチマークに対する超過リターンを$\alpha_t = r_{P(t)} - r_{B(t)}$で定義する。

このとき、アクティブ・リターンは、ポートフォリオのベンチマークに対する超過リターンの平均。

$$\alpha = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(r_{P(t)} - r_{B(t)}) \qquad \text{（アクティブ・リターン）}$$

ただし、$r_{P(t)}$：t 期のポートフォリオ・リターン、$r_{B(t)}$：t 期のベンチマーク・リターン。

また、アクティブ・リスクはトラッキング・エラー（TE）で、アクティブ・リターンの標準偏差をとる。

$$\omega = TE = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left(\alpha_t - \bar{\alpha}\right)^2}$$　　（アクティブ・リターンの標準偏差）

ただし、α_t ：t 期のアクティブ・リターン、$\bar{\alpha}$ ：アクティブ・リターンの平均。

そして、$\overline{r_P}$ ：ポートフォリオ・リターンの平均値、$\overline{r_B}$ ：ベンチマーク・リターンの平均値とすると、$\alpha_t = r_{P(t)} - r_{B(t)}$ の関係から、トラッキング・エラーは次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} TE &= \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left\{\left(r_{P(t)} - r_{B(t)}\right) - \left(\overline{r_P} - \overline{r_B}\right)\right\}^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left\{\left(r_{P(t)} - \overline{r_P}\right) - \left(r_{B(t)} - \overline{r_B}\right)\right\}^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left\{\left(r_{P(t)} - \overline{r_P}\right)^2 + \left(r_{B(t)} - \overline{r_B}\right)^2 - 2\left(r_{P(t)} - \overline{r_P}\right)\left(r_{B(t)} - \overline{r_B}\right)\right\}} \\ &= \sqrt{s_P^2 + s_B^2 - 2\rho_{PB} s_P s_B} \end{aligned}$$

ここで、s_P ：ポートフォリオ・リターンの標準偏差、s_B ：ベンチマーク・リターンの標準偏差、ρ_{PB} ：ポートフォリオ・リターンとベンチマーク・リターンの相関係数。

アクティブ・ポートフォリオ P（証券 A，B の 2 証券）のアクティブ・リターン、アクティブ・リスクは以下のようになる。

アクティブ・リターン：$\alpha_P = w_A\alpha_A + w_B\alpha_B$

アクティブ・リスク：$\omega_P = \sqrt{w_A^2\omega_A^2 + w_B^2\omega_B^2 + 2w_A w_B \rho_{A,B}\omega_A\omega_B}$

ただし、α_P ：ポートフォリオのアクティブ・リターン、α_i ：証券 i のアクティブ・リターン、w_i：証券 i の投資比率、ω_P ：ポートフォリオのアクティブ・リスク、ω_i ：証券 i のアクティブ・リスク、$\rho_{A,B}$：証券 A，B のアクティブ・リターンの相関係数、i＝A,B。

注）本来、トラッキング・エラーとはアクティブ・リターンの 2 乗平均値の平方根をとったもの（RMSE: Root Mean Square Error）とされている。

$$TE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(r_{P(t)} - r_{B(t)}\right)^2}$$　　（RMSE）

両者の違いは小さいため、実務上はアクティブ・リターンの標準偏差が一般に利用されており、協会通信テキストおよびアナリスト試験でも「**アクティブ・リターンの標準偏差**」を「トラッキング・エラー」と定義している。

$$IR = \frac{\text{ポートフォリオのベンチマークに対する超過収益率}}{\text{トラッキング・エラー（標準偏差）}}$$

2　パフォーマンス測度の使い方

上記の 4 つの測度は場合によって使い分けられるべきである。ここではそれぞれの特徴と最も有効な場合について検討する。

(1) シャープの測度

シャープの測度は、何らかのリスクをとったことで得られたリスクフリーレートに対する超過収益を総リスクで測ったものである。この方法は総リスクが重要である場合に使われる。例えば長期債のようにベータでリスクが測れない資産を含むポートフォリオやアクティブ運用が中心で分散が十分でない場合、トレイナーやジェンセンの測度よりもシャープの測度を用いるべきである。

(2) トレイナーの測度

トレイナーの測度は、ベータ 1 単位当りのリスクフリーレートに対する超過収益を測っている。ベータを使っている点で暗に想定されている比較対象は、市場ポートフォリオまたはベンチマークである。従って市場ポートフォリオやベンチマークでパフォーマンスを測ることが有効である場合、つまり高度に分散された株式ポートフォリオなどのパフォーマンスを測る場合に有効である。

(3) ジェンセンのアルファ（α）

ジェンセンのアルファはいわゆる超過収益アルファそのものであり、リスク調整にはベータを用いている点でトレイナーの測度と同様である。高度に分散されて残差項が小さいポートフォリオの収益率を測る場合に便利である。またジェンセンのアルファを使えば、ベンチマークの異なる複数のポートフォリオを比較することも容易である。ベンチマークの違いにかかわらず、リスク修正後の超過収益率がパーセンテージタームで出されるため、単純にその大きさを比べればよい。ただしリスク調整の道具がベータのみである（場合によってはマルチファクター・モデルを使うこともできるが）ので、市場モデルがポートフォリオの収益率を十分に説明できることが必要となる。

(4) インフォメーション・レシオ

ベンチマークとの乖離の大きいアクティブ運用のパフォーマンスを測る場合に有効であるが、そもそもアクティブ運用がベンチマークのリスク・リターンからの意図的な乖離をとり超過リターンを狙ったスタイルなので、分散度の高いポートフォリオのリスク調整には向いていないという面がある。

また、特定銘柄への集中度を高めたり、積極的にセクターの入れ替えを行うなどアクティブ運用の度合いを高めるほどアクティブ・リスクωは大きくなる。こうした戦略がうまく行った場合、アクティブ・リターンαも高まるが、追加的なアクティブ・リスク（ωの増分）に対して追加的なアクティブ・リターン（αの増分）は漸減していく。したがって、一定水準を超えてアクティブ・リスクを増加させると、インフォメーション・レシオ（IR）は逓減する傾向がある。

(5) 投資信託と年金運用

投資信託のパフォーマンス評価においては、シャープ・レシオがよく用いられている。過去にベンチマークが明確にされてこなかったことなどが背景にあるようで、ベータでリスク調整するトレイナー・レシオやジェンセンのアルファは、ほとんど利用されていないようである。

一方、年金資金の運用では、ベンチマーク対比での超過リターン実現を狙う運用が関係者の間でコンセンサスとなっているためか、インフォメーション・レシオによる評価が一般的となっている。

3　アクティブ運用の基本法則

前述のとおり、アクティブ運用の成果はインフォメーション・レシオによって評価される。アクティブ運用の基本法則は、インフォメーション・レシオを一定の要素の積で近似することで、インフォメーション・レシオを高めるためには何が必要なのかを理解をする上で有効である。

アクティブ運用の基本法則は、次の式で表される。

$$\alpha_P = IC \times \sqrt{BR} \times TE_P$$

ここで、α_P：ポートフォリオのアクティブ・リターン

TE_P：ポートフォリオのトラッキング・エラー

IC（Information coefficient、情報係数）：

予測した個別銘柄のアクティブ・リターンと実際のアクティブ・リターンとの相関関係を示す。IC が高いということは、個別銘柄のアクティブ・リターンの予測精度が高いことを意味する。

BR（Breadth、ブレス）：一定期間内の独立した銘柄選択の回数

さらに上記算式の両辺を、TE_P で除すことで、

$$\frac{\alpha_P}{TE_P} \equiv IR = IC \times \sqrt{BR}$$

となる。

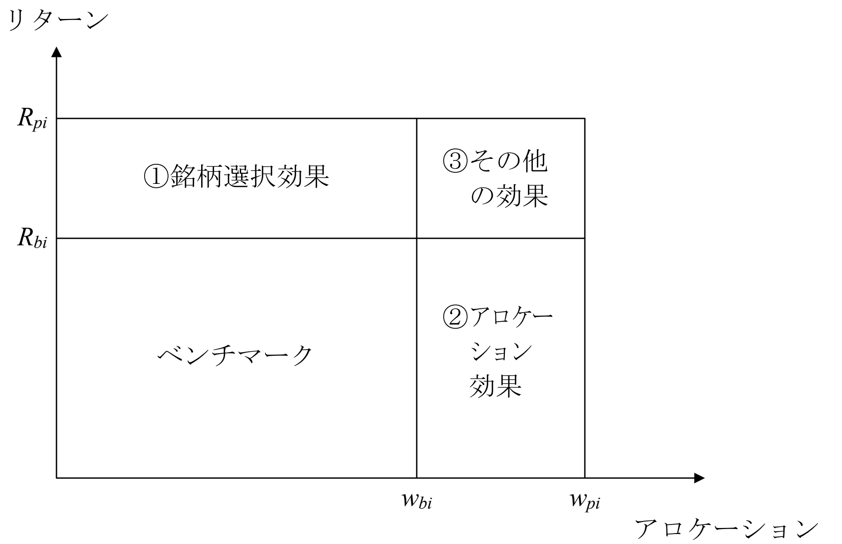
算式によると、インフォメーション・レシオは、「各銘柄のアクティブ・リターンを予測するプロセス」と「予測した各銘柄のアクティブ・リターンに基づいて各銘柄のアクティブ・ウェイトを決定するプロセス」に大別され、それらの積として表せることを意味している。

３　その他のパフォーマンス評価方法　☆☆

1　パフォーマンス要因分析

ポートフォリオの運用結果を各資産ごとに 3 つの効果に分析し、それぞれの効果ごとに合計する。

要因分解



w_{pi}：ポートフォリオにおける資産 i の組入比率
w_{bi}：ベンチマークにおける資産 i の組入比率
R_{pi}：ポートフォリオにおける資産 i のリターン
R_{bi}：ベンチマークにおける資産 i のリターン

①　銘柄選択効果

銘柄選択効果とは、投資家が、銘柄選択を行うことによって生み出されたパフォーマンスの差である。資産 i の対ベンチマークの超過収益率は（$R_{pi}-R_{bi}$）なので、ポートフォリオ全体の銘柄選択効果は次の式で計算される。

$$\text{銘柄選択効果}=\sum_{i=1}^{n}\left\{w_{bi}\times(R_{pi}-R_{bi})\right\}$$

②　アセット・アロケーション（資産配分）効果

アセット・アロケーション効果とは、投資家が、ポートフォリオにおける各資産の組入比率をベンチマークの組入比率から変更することによって生み出された、パフォーマンスの差である。組入比率の乖離は（$w_{pi}-w_{bi}$）なので、ポートフォリオ全体のアセット・アロケーション効果は次の式で計算される。

$$\text{アセット・アロケーション効果}=\sum_{i=1}^{n}\left\{(w_{pi}-w_{bi})\times R_{bi}\right\}$$

また、それ以外の部分はその他の効果と呼ばれる。

③　その他の効果$=\sum_{i=1}^{n}\left\{(w_{pi}-w_{bi})\times(R_{pi}-R_{bi})\right\}$

2 ユニバース比較による評価

類似の多数のファンドの中で、特定のファンドの相対的なパフォーマンスに注目する方法を**ユニバース比較**または**ピア比較**という。特定のファンドの相対的パフォーマンスが統計的に意味を持つには、ユニバースを構成するファンドに十分な数が必要である。

ユニバースの分類ではアクティブ、パッシブといった運用スタイルや投資哲学、意思決定ルールなどファンドマネジャーの固有の運用スタイルを考慮してファンドを分類して相対的パフォーマンス比較を行う。

ユニバース比較を行う場合に次のような点に注意すべきである。

(1) 残存者バイアス

パフォーマンスの悪いポートフォリオが解約により投資ユニバースからはずされ、結果的に過去に良好なパフォーマンスを残したポートフォリオが多く含まれてしまう。

(2) 分類のバイアス

マネジャーの運用手法や運用対象はさまざまだが、ユニバース分類の数は限られる。ユニバース分類の基準が大まかな場合、実は異質なポートフォリオを同じものとして比較してしまう。

(3) サンプルのバイアス

ユニバースを構成する際、ユニバースの信頼性確保のためポートフォリオの数を増やすことに重点が置かれてしまう場合がある。同一マネジャーが同一手法で運用する類似のポートフォリオが複数入り、特定マネジャーのバイアスがかかる。

3　ベンチマーク比較による評価

リスク調整後パフォーマンス測定はCAPMにその理論的根拠を置いているが、CAPMの重要な前提条件が非現実的との批判が高まるにつれて、その有効性に疑問が出てきた。そこでリスクに対する調整が組み込まれたベンチマーク比較によるパフォーマンス評価が急速に普及してきた。

ベンチマークはファンドマネジャーが特別の戦略的洞察を持っていない場合の中立的ポートフォリオの状態をいう。投資戦略を実行することはポートフォリオがベンチマークより乖離することを意味するので、ベンチマーク比較によるパフォーマンス測定は自動的にリスク調整後の測定を行うことになる。

自分のニーズに合うテーラーメイドのベンチマークを**ノーマルポートフォリオ**といい、投資哲学、意思決定過程、運用機関の特性、キャッシュ・ポジション政策その他を基準にして策定される。しかし、いかに注意深くノーマルポートフォリオを策定したとしてもパフォーマンス評価が完全になるわけではない。適切なノーマルポートフォリオを用いることによりファンドマネジャーの評価の誤差は著しく減少するが、評価から運・不運等の偶然性が排除されるわけではない。

● ベンチマークに必要な条件

ベンチマークとなるインデックスには次のような性質が要求される。

良いインデックスの条件

項目	内容
完全性	投資対象とする市場の時価総額、国のカバレッジ、企業の組み入れ等の投資機会全体を正確に反映していること
投資可能性	実際に組み入れ可能な銘柄でインデックスが構築されていること（例：海外資産では外国人投資家が投資できない銘柄が除外されていること）
明確で公表されたルールと公明なガバナンス	銘柄入れ替えルールなどインデックス構築方法が公表され、ルールに透明性があること
正確で完全なデータ	リターンおよび構築銘柄に関するデータが正確、完全で即座に利用可能なこと
投資家による支持	インデックスが広く認知され、標準的に利用されていること
リバランス取引の流動性	指数ポートフォリオのリバランスにおいて、流動性があり取引コストが低い取引手段があること
低い回転率と取引コスト	構成銘柄入れ替えの回転率が低く、インデックスに追随するための取引コストが抑えられていること

（出所）ショーンフェルド編「アクティブ・インデックス投資」の第6章をもとに作成

4　運用機関選択とパフォーマンス情報

パフォーマンスの数字に偶然性が混入するということは、過去のパフォーマンスの優劣が将来のパフォーマンスを予測する情報になりにくいということを意味する。運用評価のなかでパフォーマンス測定はその一部にすぎず、意思決定過程に関するファンドマネジャーの説明の合理性、マネジャーの行動の首尾一貫性等の定性的分析も重要である。最近ではパフォーマンスの数字に過度の信頼を置くことに対する疑問も高まってきている。パフォーマンス測定は有効な規範があらかじめ確立されている場合にのみ有効である。すなわち結果を評価する目的としては有用ではなく、むしろ投資意思決定過程を理解するのに有用といえる。測定の目的は顧客とファンドマネジャーとのコミュニケーションを改善し、両者が一緒になって検討すべき問題点を明らかにすることにある。運用評価における定量的なパフォーマンス測定と分析はその一部にすぎず、意思決定過程におけるファンドマネジャーの説明は理にかなっているか、ポートフォリオ再構築の際の説明が合理的か、などの定性的要素の分析と評価が重要となってくる。

補論　回帰分析と株式ポートフォリオ戦略 ☆☆☆

株式ポートフォリオ戦略を含め証券分析のほとんどあらゆる分野でデータ分析を行う場合に強力なツールとなるのが回帰分析である。アナリスト試験においては、回帰分析結果をきちんと読み取れるようにしておくことが必要である。

以下では、マーケット・モデルによる回帰分析の例をあげ、試験対策に必要となる統計量を確認しながら、回帰分析について学ぶことにする。

1　線形回帰モデル

ある変数の変動を他の変数の関数として捉える分析手法を**回帰分析**という。

いまある変数 y の変動を他の変数 x の関数として説明するのに、比較的単純な方法は、

$$y=\alpha+\beta x+u \qquad 〔1〕$$

という、y を x の1次関数で表す方法であろう。このとき、x を**説明変数**（または、**独立変数**）、y を**被説明変数**（または、**従属変数**）という。また、期待値0の確率変数である u は**撹乱項**（または、**誤差項**）と呼ばれ、説明変数 x の変動でとらえきれない被説明変数 y の変動を表す変数である。α および β はモデルの構造を決める**パラメータ**と呼ばれる定数である。

この〔1〕のように被説明変数の変動を1つの説明変数と撹乱項の1次関数として表す回帰モデルは**単純回帰モデル**（または、**単回帰モデル**）と呼ばれる。

［例］TOPIXとABCファンドの超過収益率

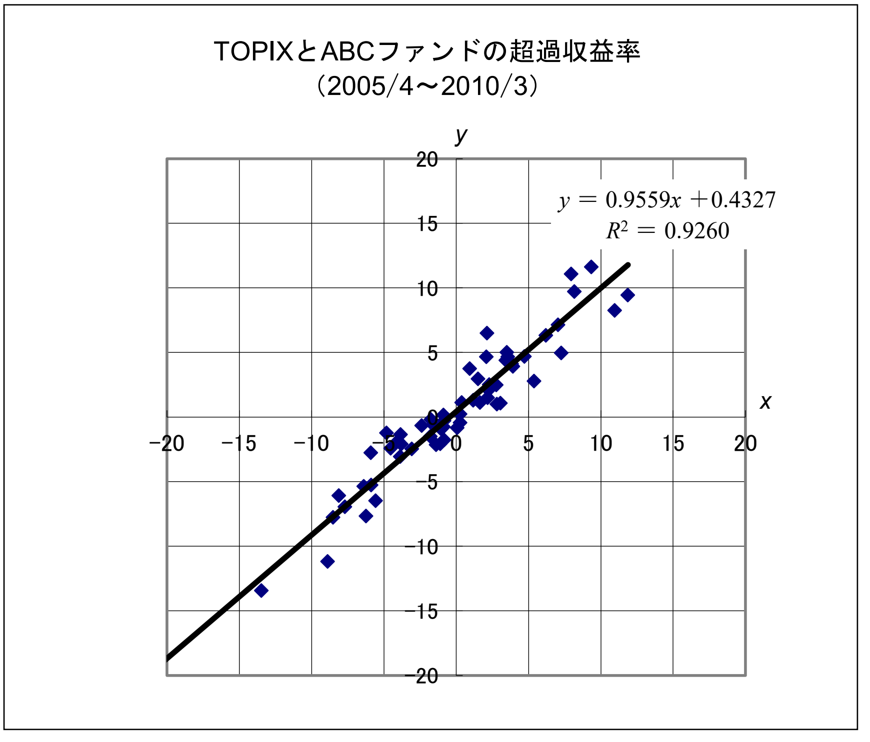
2005年4月～2010年3月までの60ヵ月間のTOPIXの月次超過収益率（$x=R_{TOPIX}-R_F$）とあるファンド（以下、ABCファンド）の月次超過収益率（$y=R_{ABC}-R_F$）の基本統計量は次の表1の通りである。

表1　TOPIXとABCファンドの超過収益率に関する基本統計量

	TOPIX（x）	ABCファンド（y）
平均（%）	－0.26972	0.174911
分散（S^2, $\%^2$）※	32.96691	32.52671
不偏分散（s^2, $\%^2$）※	33.52567	33.07801
標準偏差（S, %）	5.741682	5.703219
標準偏差（s, %）	5.790136	5.751348
共分散（S_{XY}, $\%^2$）	31.51187	
相関係数（R）	0.96231	
標準誤差※※	0.747503	0.742496
標本数	60	60

※ **標準誤差**とはパラメータ（母数）に対する推定量の標準偏差のことをいう。ここでの標準誤差は、標本平均に対するもの。

この 60 ヵ月間の月次超過収益率を散布図として描いたのが次のグラフである。



TOPIX と ABC ファンドの超過収益率の散布図と回帰直線

TOPIX の月次超過収益率 $x(=R_{TOPIX}-R_F)$ で ABC ファンドの月次超過収益率 $y(=R_S-R_F)$ を説明する回帰モデル

$$y=\alpha+\beta x+u \qquad 〔2〕$$

を仮定する。これは、TOPIX の月次超過収益率を説明変数、ABC ファンドの月次超過収益率を被説明変数とする線形回帰モデルである。

後述する最小 2 乗法（OLS）を用いると、次の表 2 のような推計結果が得られる。

表 2　TOPIX と ABC ファンドの月次超過収益率に関する回帰分析結果

	係数	標準誤差	t−値	P−値	決定係数	サンプル数
切片	0.4327	0.2039	2.1224	0.0381	0.9260	60
TOPIX	0.9559	0.0355	26.9484	1.72E−34※		

※1.72E−34＝1.72×10^{-34}

こうした回帰分析結果は、次の式〔3〕や式〔4〕のように表されることも多い。

$y=0.4327+0.9559x$ (0.2039) (0.0355)	決定係数（R^2）0.9260 ただし、(　　　) 内は標準誤差	〔3〕

あるいは、

$y=0.4327+0.9559x$ (2.1224) (26.9484)	決定係数（R^2）0.9260 ただし、(　　　) 内は t 値	〔4〕

以上の表 2、式〔3〕や式〔4〕で表された回帰分析結果が、前図で表されている回帰直線である。

試験対策としては、こうした推計結果がどのようにして得られるか、各統計量はどのような意味を持つかについて理解しておくことが重要であるので、以下では、それらについてみることにする。

2　最小2乗法（OLS）によるパラメータの推定

線形回帰モデルが与えられたとき、そのモデルに含まれるパラメータの推定を行う必要がある。そのための推定方法として、**最小2乗法**（Ordinary Least Square method、OLS）が用いられることが多い。

最小2乗法（OLS）は、回帰分析を行う際に用いられる方法として最も広く知られた方法である。この方法は、観察されたデータと回帰直線による推計値との差の2乗の合計（残差平方和と呼ばれる）が最小になるように、パラメータαとβの推定値を決める方法である。すなわち、n個のサンプル(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，…，(x_n, y_n)が観察されている場合、パラメータα、βの推定値を、それぞれ$\hat{\alpha}$、$\hat{\beta}$とすると、観測値y_tと回帰直線による推計値$\hat{y}_t$（$=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_t$）との差である残差$e_t$（$=y_t-\hat{y}_t$）の2乗和$\sum_{t=1}^{n}\hat{e}_t^{\,2}$（これを**残差平方和**という）を最小にするように$\hat{\alpha}$、$\hat{\beta}$を決める方法である。

この最小2乗法（OLS）によれば、パラメータαの推定値$\hat{\alpha}$およびβの推定値$\hat{\beta}$は、次のように推定される。

$$\hat{\beta}=\frac{S_{XY}}{S_X^2}=\frac{\text{説明変数と被説明変数の共分散}}{\text{説明変数の分散}} \qquad 〔5〕$$

$$\hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}$$

$$=\text{被説明変数の平均値}-\text{ベータの推定値}\times\text{説明変数の平均値} \qquad 〔6〕$$

先のTOPIXとABCファンドの超過収益率の例では、

①　$\hat{\beta}=0.9559$
- 回帰直線の傾きが0.9559
- TOPIXが1%上昇すると、ABCファンドは（平均的には）0.9559%上昇する

②　$\hat{\alpha}=0.4327$
- 回帰直線の切片が0.4327%

であることが示されている。

そして、これらの値は、

①　$\hat{\beta}$式〔5〕より

$$\hat{\beta}=\frac{S_{XY}}{S_X^2}=\frac{31.51187}{32.96691}\fallingdotseq 0.9559$$

②　$\hat{\alpha}$式〔6〕より

$$\hat{\alpha}=\bar{Y}-\hat{\beta}\bar{X}=0.174911-0.9559\times(-0.26972)\fallingdotseq 0.4327$$

と得られる。

3 決定係数

計量分析では、実際の観測値から回帰直線を求めた後、その直線の観測値に対するあてはまり具合をみる必要がある。

回帰式のあてはまりの尺度として用いられる決定係数 R^2 は、

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2} \qquad 〔7〕$$

$$決定係数 = 1 - \frac{残差平方和}{被説明変数の総変動}$$

と定義されるが、

$$\underbrace{\sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2}_{被説明変数の総変動} = \underbrace{\sum_{t=1}^{n} (\hat{y}_t - \bar{y})^2}_{回帰式で説明できる変動} + \underbrace{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}_{\substack{残差平方和\\ =回帰式で説明できなえい変動}} \qquad 〔8〕$$

で説明できない変動であることを用いると、**決定係数 R^2 は、被説明変数の総変動のうち、説明変数の変動で説明可能な変動の割合**をいい、**回帰式の当てはまりの良さ**、あるいは、**モデルの説明力**を表す数値である。

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}^2 S_X^2}{S_Y^2} = R_{XY}^2 \qquad 〔9〕$$

ここで R_{XY} は説明変数と被説明変数との相関係数

$$決定係数 = \frac{説明変数で説明可能な変動}{被説明変数の総変動} = 説明変数と被説明変数との相関係数の2乗$$

このように計算される決定係数 R^2 は、

$0 \leqq R^2 \leqq 1$

の間の値をとり、1 に近いほど回帰式のあてはまりがよく、0 に近いほどあてはまりが悪いことを示している。

これを先の ABC ファンドの線形回帰モデル〔2〕に適用すると、決定係数 $R^2 = 0.9260$ であるから、TOPIX 変化率の変動で ABC ファンド収益率の総変動の 92.60%が説明可能であることがわかる。

また、この値は、$\hat{\beta} = 0.9559$、$S_X^2 = 32.9669$、$S_Y^2 = 32.5267$ から、

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}^2 S_X^2}{S_Y^2} = \frac{0.9559^2 \times 32.9669}{32.5267} \fallingdotseq 0.9261$$

と計算できる（0.926$\underline{1}$ となっているのは計算誤差のため）。

なお、この計算は相関係数 R ＝0.96231 から、

$R^2 = 0.96231^2 \fallingdotseq 0.9260$

と計算することもできる。

4　回帰係数の仮説検定

回帰分析を行う観点からは、説明変数が影響を与えているか否か（β が 0 かどうか）、他に被説明変数の値に影響しているものがあるかどうか（α が 0 かどうか）、あるいは、説明変数 x が市場ポートフォリオの超過収益率の場合、市場ポートフォリオと同程度に変動するかどうか（β が 1 かどうか）、市場ポートフォリオの変動では説明できない超過収益をあげているかどうか（α がプラスといえるかどうか）というように、回帰係数の数値についての一定の情報を得たい場合が多い。

こうした問題を考えるにあたっては、「β（あるいは α）がある値をとっている」ということを帰無仮説（H_0）(注2) 参照にとり、統計的検定を行う必要がある。回帰係数の仮説検定では ***t* 検定**と呼ばれる方法が用いられることが一般的である。

実際に、回帰係数の仮説検定を行う場合には、「回帰係数がある特定の値である」ということ、つまり、

H_0 ： $\beta = \beta_0$（あるいは、$\alpha = \alpha_0$）

を帰無仮説としてとり、回帰係数について $\beta = \beta_0$（あるいは、$\alpha = \alpha_0$）が成立するかどうかを検討する。その際、仮説検定の手法としては、帰無仮説 H_0 と代替的な仮説としての対立仮説 H_1 をたて、t 検定を行う。

t 検定という方法がとられるのは、β（α）の真の値が β_0（α_0）のとき、$\hat{\beta}$（$\hat{\alpha}$）の標準誤差を $s_{\hat{\beta}}$（$s_{\hat{\alpha}}$）とすると、

$\dfrac{\beta - \beta_0}{s_{\hat{\beta}}}$（あるいは、$\dfrac{\alpha - \alpha_0}{s_{\hat{\alpha}}}$）が、ある自由度（＝サンプル数－説明変数の個数－1）の t 分布 (注3) 参照に従う

ことを利用するためである。

そこで、t 値を計算し、一定の有意水準（帰無仮説 H_0 が正しいにも関わらず、対立仮説 H_1 を採択するという誤りを犯す確率）の下で設定される棄却域にこの t 値が入っているかどうかで仮説の真偽について判断する。

t 検定を行うにあたっての仮説検定の具体的なポイントは以下の通り。

①　棄却域の設定

t 分布は自由度によってその分布が決まる。回帰係数の仮説検定の場合、t 分布の自由度は、次のように求められる。

自由度＝サンプル数－説明変数の個数－1	〔10〕

単純回帰分析の場合は、自由度＝n−2＝サンプル数−2 である。

この自由度と有意水準から t 分布表にしたがって、棄却域（の臨界値）を求めることになる。

② t 値の計算

t 検定を行う際に必要になる t 値は、次のように計算される。

$$t_{\hat{\beta}}=\frac{\hat{\beta}-\beta_0}{s_{\hat{\beta}}} \qquad t_{\hat{\alpha}}=\frac{\hat{\alpha}-\alpha_0}{s_{\hat{\alpha}}} \qquad 〔11〕$$

$$t\text{値}=\frac{\text{推定値}-\text{仮説値}}{\text{標準誤差}}$$

③ 帰無仮説を棄却するかの判断基準

ここまでで求められた棄却域に t 値がはいっているかどうかで帰無仮説が棄却されるかどうかが決まる。

以上を先のABCファンドの線形回帰モデル〔2〕に適用して、

① TOPIX変化率がABCファンド収益率に影響しているかどうか

② ABCファンドは市場全体と同程度のリスクであるといえるかどうか

③ 定数項は正かどうか

を有意水準5％で判断することにしよう。

① TOPIX変化率がABCファンド収益率に影響しているかどうか

帰無仮説 H_0 ： $\beta=0$

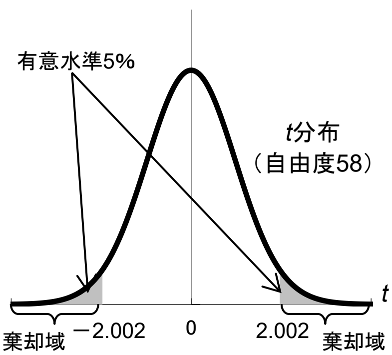
対立仮説 H_1 ： $\beta\neq 0$ （両側検定）

を有意水準5％で判断することにする。

$\hat{\beta}$ の t 値 $t_{\hat{\beta}}$ は、

$$t_{\hat{\beta}}=\frac{0.9559-0}{0.03547}\fallingdotseq 26.9484$$

であり、有意水準5％に対応する t 分布点は、巻末の t 分布表から、



自由度＝サンプル数－説明変数の個数－1＝60－1－1＝58、

（両側検定なので）片側2.5％点に対応する臨界値2.002（自由度60のときの2.000と自由度50のときの2.009から線形補完して $2.000+\frac{60-58}{60-50}\times(2.009-2.000)\fallingdotseq 2.002$ と計算）を比較して、

$$t_{\hat{\beta}}=26.9484>2.002$$

より、$\hat{\beta}$ の t 値が棄却域に入るから、帰無仮説 H_0 は棄却され、統計的に有意であると判断される。つまり、「TOPIX変化率がABCファンド収益率に影響していない」とはいえない。

②　ABCファンドは市場全体と同程度のリスクであるといえるかどうか

帰無仮説 H_0 ： $\beta=1$

対立仮説 H_1 ： $\beta\neq1$ （両側検定）

を有意水準5%で判断することにする。

$\hat{\beta}$ の t 値 $t_{\hat{\beta}}$ は、

$$t_{\hat{\beta}}=\frac{0.9559-1}{0.03547}\fallingdotseq-1.2433$$

であり、有意水準5%に対応する t 分布点は、自由度58の t 分布であることに注意し、（両側検定なので）2.5%点に対応する臨界値 2.002（この値の求め方は①と同様）と比較して、

$$\left|t_{\hat{\beta}}\right|=1.2433<2.002$$

より、 $\hat{\beta}$ の t 値が棄却域に入らないから、帰無仮説 H_0 は棄却されない。

③　定数項は0か否か

帰無仮説 H_0 ： $\alpha=0$

対立仮説 H_1 ： $\alpha\neq0$ （両側検定）

を有意水準5%で判断することにする。

$\hat{\alpha}$ の t 値 $t_{\hat{\alpha}}$ は、

$$t_{\hat{\alpha}}=\frac{0.004327-0}{0.002039}\fallingdotseq2.122$$

であり、有意水準5%に対応する t 分布の臨界値2.002（この値の求め方も①と同様）と比較して、

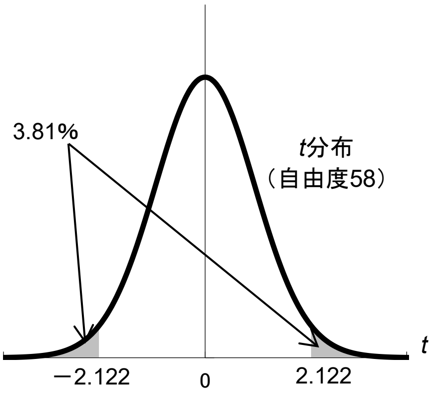
$$t_{\hat{\alpha}}=2.122>2.002$$

より、 $\hat{\alpha}$ の t 値が棄却域に入るから、帰無仮説 H_0 は棄却され、定数項は有意に正であると判断される。

以上では、仮説検定を t 検定によって行ってきた。この他に、**p 値（有意確率）**によって行う方法もある。

表2で与えられた p 値は、帰無仮説 H_0 を $\beta=0$ または $\alpha=0$ として両側検定を行う場合の p 値である。

③の定数項は0か否かを見る場合であれば、定数項の p 値が表2から0.0381であることを利用して判断する。このことは、t 分布を使って表せば、帰無仮説 H_0 が正しいときに図のシャドー部分の数値が推定される確率が3.81%であることを示している。有意水準の5%以下でしか起こらないことが起こっていることになるから、帰無仮説は棄却される。このように、p 値が有意水準を下回るときには、帰無仮説は棄却されることになる。



（注 1）

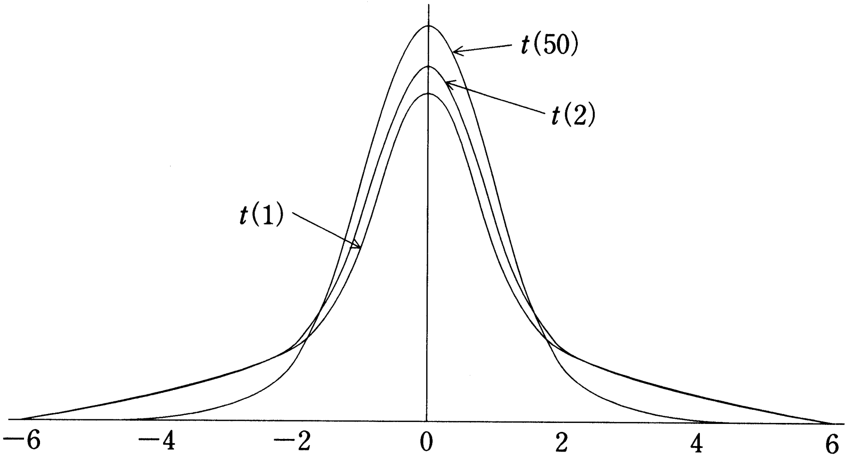
主張すべき理論や事柄を正確に捉えることができる場合は、主張そのものを検定すればよいが、それができない場合には、「帰無仮説」、「対立仮説」を立て、帰無仮説の検定を行い、その仮説が棄却されれば、対立仮説を「正しい」と考える。

（注 2）t 分布

平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布に従う母集団※から抽出されたデータ（標本）について考える。データを観察する場合、母集団の分散（母分散）は既知でないことが通常であるが、このように母分散が未知の場合に用いられる確率分布が **t 分布**である。
※確率変数の分布を構成するデータ全体からなる集合を母集団という。

t 分布は、自由度と呼ばれる数値によって異なる分布になるが、平均が 0 であり、左右対称で釣鐘型の形状である点は、標準正規分布に似ている。自由度 $d.f.$ の t 分布を $t(d.f.)$ で表せば、次のグラフのように、自由度 n が大きくなればなるほど標準正規分布に近づいていく。

t 分布



ところで、同一の母集団から独立に抽出されたn個のデータX_1，X_2，…，X_nを考える。標本平均$\overline{X}$と不偏分散s^2は次のように定義される。

標本平均$\overline{X}$

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

不偏分散s^2

$$s^2=\frac{1}{n-1}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2\}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

このとき、母集団から取り出された標本平均$\overline{X}$について、**t統計量**を

$$t=\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$

と定義すると、このt統計量が自由度**n－1のt分布**に従うことが知られており、

$$t=\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

と表す。ここで、$s/\sqrt{n}$は**標準誤差**とよばれる。

標本データを用いて推定または仮説検定を行う際には、このt統計量がt分布に従うことを利用する。n個の標本から直接標本平均$\overline{X}$について考察する場合には、自由度n－1のt分布を考えればよいが、本文中でも触れたように、回帰分析において、回帰係数α、βについて推定または仮説検定を行う場合には、説明変数がk個あるような回帰分析では、自由度が$n-k-1$のt分布を考える必要がある。