第1章

ポートフォリオ・マネジメント

1. 傾向と対策

「ポートフォリオ・マネジメント」は、モダン・ポートフォリオ理論（Modern Portfolio Theory）と称する一連の理論体系を骨子とする。モダン・ポートフォリオ理論は、証券アナリスト試験1次レベルのみならず2次レベルを通して、さらには全科目を通して、試験全体の性格を大きく特徴付ける「目玉」といっても過言ではないだろう。実際、この理論体系を前面に打ち出し中心テーマに据えた資格試験は、少なくともわが国においては、証券アナリスト試験の他にあまりない。

ここでは、株式をはじめとするリスク資産の収益率は正規分布に従うという仮定の下で、リスクとリターンという2つの変数を使って話が展開される。そして、まず最大の主張の1つが「リスク分散」である。良し悪し正否は別にして、古くからある「卵は1つの籠に盛るな」という投資の格言を、「分散投資の効果（ポートフォリオ効果）」として数量的・理論的に裏付け、これを手始めに投資家のリスクに対する振る舞い（リスク選好）、資本資産評価モデル（CAPM）、マーケット・モデル、パフォーマンス（運用成績）評価などなど、きわめて広範な論点を系統立てて扱ってゆく。

この分野のポイントは、まずリスク・リターンを数量的に把握するため、どうしても統計学の知識が必要となること。とくに5つの基本統計量、およびポートフォリオのリスクとリターンといった概念、計算処理に慣れることが必須である。そして「過去の出題例」を見れば明らかだが、毎回各論点から万遍なく網羅的に出題されるので、残念ながら試験対策としては、とにかく一通りのことをやっておくしかないだろう。

総まとめテキストの項目と過去の出題例

「総まとめ」の項目	過去の出題例	重要度
リターンとリスク	2023年春・第５問・Ⅰ問３ Ⅱ問２ 2023年秋・第５問・Ⅱ問１、問２、問５ 2024年春・第５問・Ⅰ問１ Ⅱ問１～問３、問５ 第６問・Ⅱ問３ 2024年秋・第５問・Ⅰ問１、問３ Ⅱ問１、問２、問４、問５ 2025年春・第５問・Ⅰ問２、問３ Ⅱ問１、問３	A
投資家の選好	2023年春・第５問・Ⅰ問１、問２ 2023年秋・第５問・Ⅰ問１、問２ 2024年春・第５問・Ⅰ問２、問３ Ⅱ問４ 2024年秋・第５問・Ⅰ問１～問３ 2025年春・第５問・Ⅰ問１ Ⅱ問４	A
マーケット・モデル	2023年春・第５問・Ⅱ問３ Ⅲ問２～問４ 2024年秋・第５問・Ⅲ問１、問３～問５ 2025年春・第５問・Ⅱ問４、問５	B
CAPM	2023年春・第５問・Ⅰ問４ Ⅱ問１、問４、問５ Ⅲ問１ 2023年秋・第２問・Ⅲ問３ 第５問・Ⅰ問３ 2024年春・第５問・Ⅰ問４ 2024年秋・第５問・Ⅱ問３ 2025年春・第２問・Ⅱ問１、問２	A
マルチ・ファクター・モデル	2023年春・第５問・Ⅰ問５ 2023年秋・第５問・Ⅲ問１～問５ 2024年春・第５問・Ⅲ問１～問５ 2024年秋・第５問・Ⅰ問５ 2025年春・第５問・Ⅲ問１～問５	A

効率的市場仮説	2023年秋・第５問・Ⅰ問４ 2024年春・第５問・Ⅰ問５ 2024年秋・第５問・Ⅰ問４ 2025年春・第５問・Ⅰ問５	B
ポートフォリオ・ マネジメントと評価	2023年春・第６問・Ⅰ問２ Ⅱ問１、問３～問５ 2023年秋・第３問・Ⅰ問５ 第５問・Ⅰ問５ Ⅱ問３、問４ 第６問・Ⅰ問１ Ⅱ問１～問５ 2024年春・第６問・Ⅰ問１、問５ Ⅱ問１、問２、問５ 2024年秋・第５問・Ⅲ問２ 第６問・Ⅱ問１～問５ 2025年春・第６問・Ⅰ問５ Ⅱ問１～問５	A
計量分析と統計学	2023年春・第５問・Ⅲ問５ 2025年春・第５問・Ⅰ問４ Ⅱ問２	C
機関投資家と 個人投資家	2023年春・第６問・Ⅰ問１、問３～問５ Ⅱ問２ 2023年秋・第６問・Ⅰ問２～問５ 2024年春・第６問・Ⅰ問２～問４ Ⅱ問４ 2024年秋・第６問・Ⅰ問１～問５ 2025年春・第６問・Ⅰ問１～問４	A

2. ポイント整理と実戦力の養成

1　投資の基礎概念

Point ① 現在価値と将来価値

証券分析では、金利計算として、主に**複利計算**が使われる。元金X_0円は、年利r%のとき、１年複利で計算すれば、n年後に$X_n=X_0(1+r)^n$ 円となる。ところでこのことは、現在のX_0円は、n年後の将来、X_n円の価値をもつと考えることもできる。このように考えたとき、現在の元金X_0円を**現在価値**と、それをn年間運用したときの受取X_n円を**将来価値**と、それぞれ呼ぶ。この現在価値と将来価値との間には、次のような関係が成立する。

$$X_n=(1+r)^n\ X_0$$

または、

$$X_0=\frac{1}{(1+r)^n}\ X_n$$

現在価値X_0の式における$\frac{1}{(1+r)^n}$は、「n年後の１円の現在価値」を表しており、**割引係数**（ディスカウント・ファクター）と呼ばれる。

以上は、年１回複利の場合の計算であるが、年間の複利回数の頻度が高くなると、次のように計算される。

	将来価値	現在価値
半年（年２回）複利	$X_n=\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}X_0$	$X_0=\frac{1}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}}X_n$
	⋮	⋮
年m回複利	$X_n=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}X_0$	$X_0=\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}}X_n$

さらに、年複利回数のmを増やしその極限をとると、$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}=e^{rn}$（ただし、$e$は自然対数の底で、$e=2.71828\ldots$）となるから、次のような**連続複利**による計算がデリバティブ評価において用いられることが多い。

	将来価値	現在価値
連続複利	$X_n = e^{rn} X_0$	$X_0 = \dfrac{X_n}{e^{rn}} = e^{-rn} X_n$

Point ② 投資収益率

証券分析では、投資もしくは資金運用による収益（リターン）を測定する尺度として、主に**投資収益率**（R）を使う。投資収益率とは、投資額に対する収益の割合であり、次のように表される。

$$\text{投資収益率}(R) = \frac{\text{収益}}{\text{投資額}}$$

Point ③ 算術平均と幾何平均

過去の投資収益率のデータより、多期間にわたる収益率が与えられたとき、この投資収益率（リターン）の特徴を調べることが証券分析における関心事となる。投資収益率の特徴を捉えるための基本的な方法は、多期間にわたる投資収益率の平均を求めることである。代表的な平均の計算方法には、**算術平均と幾何平均**とがある。いま、n期間にわたって投資収益率R_1、…、R_nが観測されたとする。このとき、算術平均$\overline{R_a}$と幾何平均$\overline{R_g}$とは、それぞれ、次のように表される。

⑴　**算術平均**

$$\overline{R_a} = \frac{1}{n}(R_1 + \cdots + R_n) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} R_t$$

⑵　**幾何平均**

$$\overline{R_g} = \{(1+R_1)\times\cdots\times(1+R_n)\}^{\frac{1}{n}} - 1 = \left\{\prod_{t=1}^{n}(1+R_t)\right\}^{\frac{1}{n}} - 1$$

なお、幾何平均が算術平均を上回ることはない。

このことを、2期の収益率のデータがR_1とR_2であったとして確かめてみることにすると、

算術平均：$\overline{R_a} = \dfrac{R_1 + R_2}{2}$

幾何平均：$\overline{R_g} = \sqrt{(1+R_1)(1+R_2)} - 1$

である。

ここで、

$$
\begin{aligned}
\left(1+\overline{R_a}\right)^2-\left(1+\overline{R_g}\right)^2 &= \left(1+\frac{R_1+R_2}{2}\right)^2-\left(1+\sqrt{(1+R_1)(1+R_2)}-1\right)^2 \\
&= \left\{\frac{(1+R_1)+(1+R_2)}{2}\right\}^2-\left(\sqrt{(1+R_1)(1+R_2)}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left\{(1+R_1)^2+2(1+R_1)(1+R_2)+(1+R_2)^2\right\} \\
&\quad -(1+R_1)(1+R_2) \\
&= \frac{1}{4}\left\{(1+R_1)^2-2(1+R_1)(1+R_2)+(1+R_2)^2\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{(1+R_1)-(1+R_2)\right\}^2 \\
&\geqq 0
\end{aligned}
$$

という関係から、

$$
\left(1+\overline{R_a}\right) \geqq \left(1+\overline{R_g}\right)
$$

が成立する。これより、幾何平均が算術平均よりも大きくなることは決してないことが明らかとなる。なお、この関係式で等号が成立する（幾何平均と算術平均が等しくなる）のは、$R_1 = R_2$ のときである。

また、過去のリターンデータの平均によって

将来の期待リターンを推定する場合…過去のリターンの算術平均リターン

過去の実績リターンを計測する場合…過去のリターンの幾何平均リターン

を用いるべきであるとされている。

これは、算術平均は統計的には最尤推定量（もっとも確からしい推定量）であるという性質が知られているため将来の予測にふさわしく、幾何平均は複利の効果を考慮できるため過去の実績の把握に適していると考えられるためである。

例題 1

《2004. 5. Ⅱ. 1 ・ 2》

以下の問 1 および問 2 に答えよ。

下表は過去 4 年間のＸ社株式の株価と配当の推移である。

表　Ｘ社の株価と 1 株当たり配当

	期首株価	期末株価	配当
1 年目	1,200円	920円	10円
2 年目	920円	1,100円	20円
3 年目	1,100円	1,000円	30円
4 年目	1,000円	1,400円	30円

（注）配当支払時期は期末。

問 1　4 年間の算術平均投資収益率は年率何％でしたか。

A　5 ％

B　6 ％

C　7 ％

D　8 ％

E　9 ％

問 2　4 年間の幾何平均投資収益率は年率何％でしたか。

A　5 ％

B　6 ％

C　7 ％

D　8 ％

E　9 ％

解答　問 1　E　　問 2　B

解　説

問１　算術平均

$$\text{投資収益率}=\frac{\text{収益}}{\text{投資額}}=\frac{\text{キャピタル・ゲイン（ロス）＋インカム・ゲイン}}{\text{投資額}}$$

より、Ｘ社株式の１年目～４年目までの各年の投資収益率は、

１年目　$\dfrac{(920-1,200)+10}{1,200}=-0.225(-22.5\%)$

２年目　$\dfrac{(1,100-920)+20}{920}=0.2173\ldots\approx0.217(21.7\%)$

３年目　$\dfrac{(1,000-1,100)+30}{1,100}=-0.0636\ldots\approx-0.064(-6.4\%)$

４年目　$\dfrac{(1,400-1,000)+30}{1,000}=0.430(43.0\%)$

よって、算術平均投資収益率は、

$$\frac{(-22.5)+21.7+(-6.4)+43.0}{4}=8.9\ldots\approx9(\%)$$

問２　幾何平均

４年間の幾何平均投資収益率は、

$$\sqrt[4]{(1-0.225)(1+0.217)(1-0.064)(1+0.43)}-1=0.059\ldots\approx0.06=6(\%)$$

幾何平均の計算にあたっては、投資収益率を％表示そのままではなくそれを小数表示した数値（例えば－22.5％であれば－0.225）を使って計算する点に注意する。なお、算術平均の計算については、上で示したように、％表示そのままで計算してもよいし、小数表示の数値で計算してもよい（あえていえば、％表示の数値で計算した方が電卓の計算の手間が若干少なくてすむ分だけおすすめといえる）。

2　個別証券のリスク・リターン構造

Point ① 投資収益率

$$投資収益率 = \frac{収益}{投資額}$$

において、投資額も収益もともに確定したものと考えることは、投資家が、いま行おうとしている投資について、どれだけの収益をもたらすものか事前に確実に知っていることを意味している。このことは、投資対象として、投資時点で投資収益率が確定している証券である**無リスク証券**（リスクフリー資産または**安全証券**）だけを考えていることとなる。これに対して、投資時点で投資収益率が確定していない証券である**リスク証券**をも投資対象に含めた場合、投資家は、将来得られるであろう収益を予想する必要がある。現代ポートフォリオ理論の最大のポイントは、この予想される収益を**確率変数**とみなすことにある。予想される収益を確率変数と考えたとき、それによって得られる投資収益率も確率変数となる。これ以後、ある個別証券iの投資収益率をR_iと示す。

Point ② 確率変数と確率分布（「計量分析」関連事項）

確率変数とは、いろいろな値をいろいろな確率でとるような変数であり、そこでは、そのとりうる値とその値が実現する確率とが対応付けられている。その対応関係は**確率分布**と呼ばれる。ある確率変数の特徴を捉えるということは、確率分布のもつ特徴を捉えることである。そのためのもっとも基本的な統計量として、**期待値**と**分散**（または、**標準偏差**）がある。期待値はその分布の**中心的な位置**を示し、分散（または、標準偏差）はその分布の**チラバリ具合**を示す。現代ポートフォリオ理論では、この期待値と分散（または、標準偏差）によって、確率変数とみなした投資収益率の特徴を捉えることとなる。そこでは、投資収益率の期待値を証券の**リターン**の尺度として使い、投資収益率の分散（または、標準偏差）を証券の**リスク**の尺度として使う。

Point ③　リターンの尺度

リターンの尺度としては、投資収益率の期待値が使われる。この投資収益率の期待値は、**期待投資収益率（または期待収益率）**と呼ばれる。確率変数とみなした個別証券iの収益率R_iの期待値$E(R_i)$は、次のように定義される。

$$E(R_i) = p_1 R_{1,i} + \cdots + p_n R_{n,i} = \sum_{t=1}^{n} p_t R_{t,i}$$

ただし、

n　：証券iの収益率のとりうる値の個数

$R_{t,i}$　：収益率のとりうる値のうち第t番目の投資収益率

p_t　：第t番目の投資収益率が実現する確率

Point ④　リスクの尺度

⑴　分散σ_i^2

確率変数とみなした個別証券iの収益率R_iの分散σ_i^2は、次のように定義される。

$$\begin{aligned}\sigma_i^2 &= p_1\left\{R_{1,i} - E(R_i)\right\}^2 + \cdots + p_n\left\{R_{n,i} - E(R_i)\right\}^2 \\ &= \sum_{t=1}^{n} p_t\left\{R_{t,i} - E(R_i)\right\}^2 \\ &= E\left\{R_i - E(R_i)\right\}^2 \\ &= E(R_i^2) - \left\{E(R_i)\right\}^2\end{aligned}$$

⑵　標準偏差σ_i

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \sqrt{p_1\left\{R_{1,i} - E(R_i)\right\}^2 + \cdots + p_n\left\{R_{n,i} - E(R_i)\right\}^2} \\ &= \sqrt{\sum_{t=1}^{n} p_t\left\{R_{t,i} - E(R_i)\right\}^2} \\ &= \sqrt{\sigma_i^2}\end{aligned}$$

このように、標準偏差は分散の正の平方根で表される。

例題 2

以下の問 1 から問 3 に答えよ。

表１．１には、A社株の投資収益率 R_A の確率分布が示されている。

表１．１：A社の投資収益率の確率分布

景気状態	好況	平常	不況
確率	0.3	0.5	0.2
予想される収益率（%）	25	5	−10

問 1　A社の期待投資収益率 $E(R_A)$ はいくらか。

問 2　A社の投資収益率の分散 σ_A^2 はいくらか。

問 3　A社の投資収益率の標準偏差 σ_A はいくらか。

解答

問 1　8 %

問 2　156

問 3　12.5%

解　説

問１　期待投資収益率

$$E(R_A)=0.3\times 25+0.5\times 5+0.2\times(-10)$$
$$=8\ (\%)$$

これより、Ａ社の期待投資収益率は８％となる。

問２　投資収益率の分散

$$\sigma_A^2=0.3\times(25-8)^2+0.5\times(5-8)^2+0.2\times(-10-8)^2$$
$$=156$$

これより、Ａ社の分散で測ったリスクは156となる。

問３　投資収益率の標準偏差

$$\sigma_A=\sqrt{\sigma_A^2}$$
$$=\sqrt{156}$$
$$\fallingdotseq 12.5(\%)$$

これより、Ａ社の標準偏差で測ったリスクは12.5％となる。

3　投資家の選好

Point ① 効用関数と期待効用

資産運用により投資家が得られる満足の程度を**効用**（utility）という。この効用は、将来の資産額に依存して決まると考えられるので、一般的には、投資家の効用を資産額の関数として、$U = U(W)$（ただし、U：ある投資家の効用、W：将来得られる資産額）と表し、**効用関数**（utility function）と呼ぶ。

不確実性下の投資家の意思決定を分析する場合には、効用の期待値である**期待効用**（expected utility）を用いる。

期待効用＝（状態ごとの確率×効用）の合計

$$E[U] = p_1U(W_1) + p_2U(W_2) + \cdots + p_nU(W_n) = \sum_{s=1}^{n} p_sU(W_s)$$

ただし、p_s：状態 s（$s = 1, \cdots, n$）の生起確率、

W_s：状態 s における資産額

このように期待効用が定義できる効用関数をフォンノイマン＝モルゲンシュテルン型効用関数と呼び、ファイナンス理論では、投資家はこうして定義される期待効用の最大化をはかるものと考えて分析が行われる。

Point ② リスクに対する投資家の３タイプ

投資家のリスクに対する態度は、大別すると、次の３タイプに分類される。

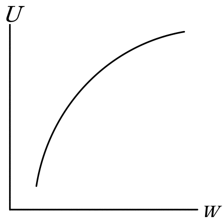
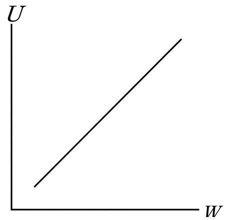
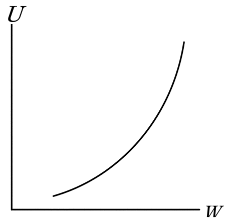
(1)　**リスク回避型**	資産額の期待値が同じであれば、資産額のばらつき（リスク）の小さい方を選好する。
(2)　**リスク中立型**	資産額の期待値のみに関心があり、資産額の期待値が同じであれば、資産額のばらつき（リスク）の大小に関わらず同程度に選好する。
(3)　**リスク追求型**	資産額の期待値が同じであれば、資産額のばらつき（リスク）の大きい方を選好する。

これはフェアギャンブルという概念を用いて説明することもでき、**フェアギャンブル** $\tilde{\varepsilon}$ は「期待値ゼロのくじ（賭け）」（$E[\tilde{\varepsilon}]=0$）と定義される。確実な資産額 W に対しては、$E[W+\tilde{\varepsilon}]=W$ が成立する。つまり、フェアギャンブルは資産の期待値を変えることなく、リスクのみを増加させることを意味する。

(1)　**リスク回避型**	$U(W)>E[U(W+\tilde{\varepsilon})]$	くじの保有を好まないため、資産の期待値が同じであれば確実な方を選好する。
(2)　**リスク中立型**	$U(W)=E[U(W+\tilde{\varepsilon})]$	くじの保有に無関心であるため、資産の期待値が同じであれば確実な場合と不確実な場合で効用は等しい。
(3)　**リスク追求型**	$U(W)<E[U(W+\tilde{\varepsilon})]$	くじの保有を好むため、資産の期待値が同じであれば不確実な方を選好する。

これら３タイプの投資家の資産額に対する効用関数は、次のように描かれる。

図１－３－１　投資家のリスクに対する態度と効用関数

	投資家のタイプ		
	⑴リスク回避型	⑵リスク中立型	⑶リスク追求（愛好）型
形状	 上に凸	 直線	 下に凸
関数	凹関数	（１次関数）	凸関数
限界効用	逓減	一定	逓増

※　リスク回避度が高まるにつれて、効用関数の曲率は大きくなる（＝上への凸性が強くなる）。

Point ③ 確実性等価額

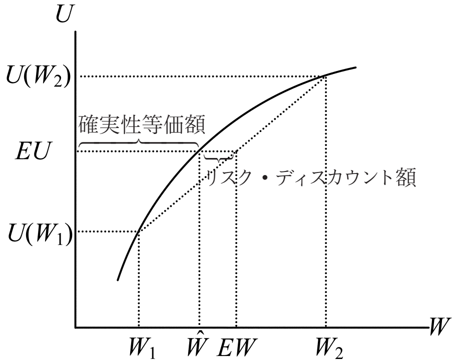
確実性等価額（certainty equivalent）とは，不確実性を伴う投資の期待効用と効用が等しくなる確実な投資の場合の資産額をいう。

例えば、将来の資産額が1/2ずつの確率で W_1、W_2 となる場合、期待効用 EU は、

$$EU = \frac{1}{2}U(W_1) + \frac{1}{2}U(W_2)$$

と表せるから、$U(W_1)$ と $U(W_2)$ の中点の高さになる。これと等しい効用をもたらす確実な資産額は $\hat{W}$ であり、これが確実性等価額である。

図１－３－２　確実性等価額



この場合、将来の資産額の期待値 EW は W_1、W_2 の中点となるから、このグラフのように効用関数が上に凸に描かれるリスク回避型投資家の場合、確実性等価額 $\hat{W}$ は将来の資産額の期待値 EW を下回ることになる。この将来の資産額の期待値 EW と確実性等価額 $\hat{W}$ の差をリスク・ディスカウント額という。

Point ④　平均・分散アプローチと投資家の無差別曲線

マーコヴィッツによる平均・分散アプローチでは、

リターンの指標…収益率の期待値（期待収益率）

リ　ス　クの指標…収益率の分散（または標準偏差）

を用いる。平均・分散アプローチが成立する世界では、期待効用は、

$$E[U_i] = E[R] - \frac{\gamma_i}{2}\sigma^2$$

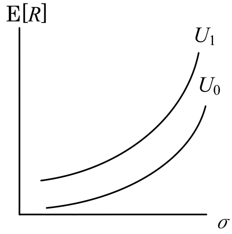
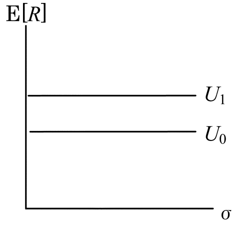
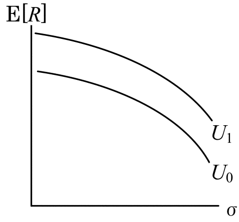
ただし、U_i ：投資家 i の効用、$E[R]$ ：期待収益率、

σ ：収益率の標準偏差、γ_i ：投資家 i のリスク回避度

などと表される。

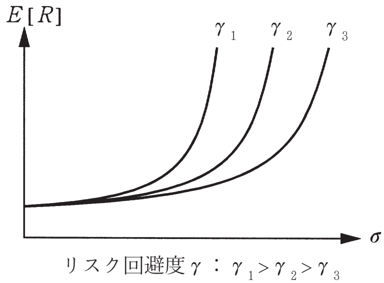
また、効用が等しいリスクとリターンの組合せである**無差別曲線**（indifference curve）は次のように描かれ、上方に位置する無差別曲線ほど効用水準は高い（$U_1 > U_0$）。

図１－３－３　投資家のリスクに対する態度と無差別曲線

	投資家のタイプ		
	(1)リスク回避型 （$\gamma_i > 0$）	(2)リスク中立型 （$\gamma_i = 0$）	(3)リスク追求（愛好）型 （$\gamma_i < 0$）
形状	 右上がりの曲線	 水平な直線	 右下がりの曲線

ファイナンス理論では、通常、投資家はリスク回避型であると仮定される。

図１－３－４　リスク回避者のリスク回避度と無差別曲線



例題３

期待効用最大化をはかる投資家の選好に関する次の記述の正誤を答えよ。

A　投資家がリスク回避型であるとき、投資家の得る効用を資産価値の関数として表した効用関数は凹関数である。

B　リスク回避度の高い投資家の確実性等価額は、リスク回避度の低い投資家の確実性等価額よりも大きい。

C　投資家がリスク回避型であるとき、確実性等価額はリスク資産の価値の期待値よりも大きい。

解答 A　正　　B　誤　　C　誤

解　説

A　正　投資家がリスク回避型であるとき、投資家の効用関数のグラフは上に凸になる。グラフが上に凸になる関数は凹関数と呼ばれる。

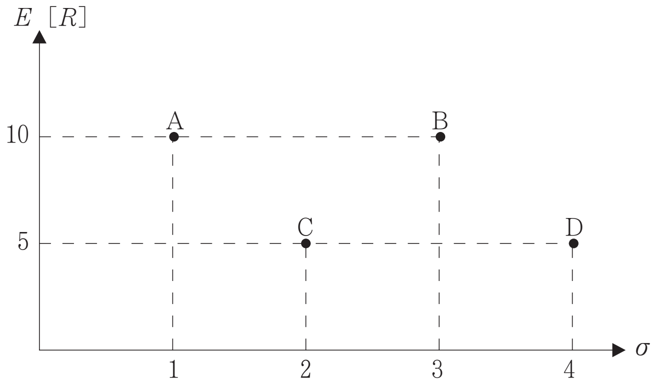
B　誤　リスク回避度の高い投資家の効用関数の曲率は、リスク回避度の低い投資家の効用関数の曲率よりも大きくなる分だけ、リスク回避度の高い投資家の確実性等価額の方が小さくなる。

C　誤　投資家がリスク回避型であるとき、投資家の効用関数のグラフは上に凸になるため、確実性等価額はリスク資産の価値の期待値よりも小さくなる。

例題4

以下の問1および問2に答えよ。

期待投資収益率と標準偏差の平面においてA、B、C、Dの4つのポートフォリオがグラフのように位置している。



問1　リスク中立者Xにとって最も効用の低いポートフォリオはどれか。

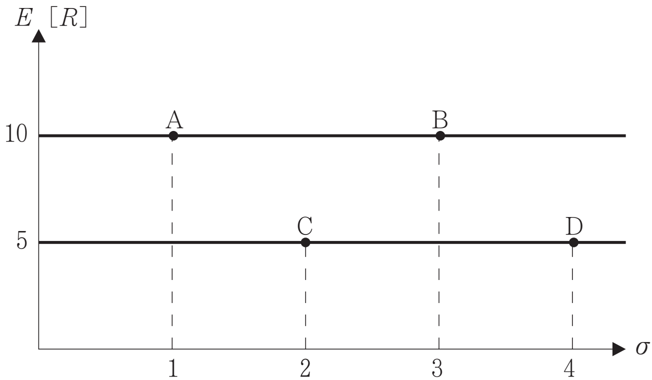
問2　リスク回避者Yにとって最も効用の高いポートフォリオはどれか。

解答 ▷ 問１　Ｃ、Ｄ　　問２　Ａ

解　説

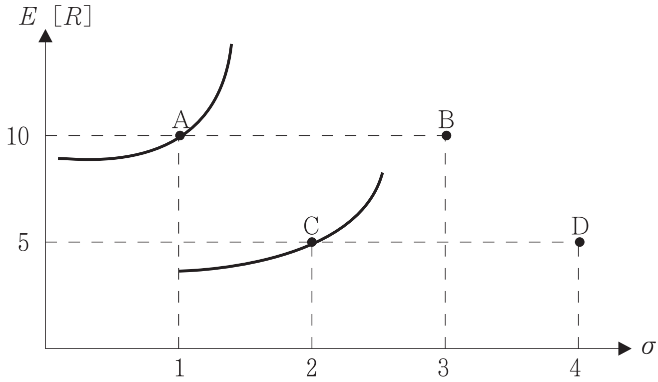
問１

　リスク中立者にとってリターン（期待投資収益率）は高ければ高いほど効用を高めることになるが、リスク（標準偏差）に関しては無関心である。すなわち、リターンが同じであればリスクが大きくても小さくても効用には影響しない。したがって、ポートフォリオＡとＢの効用は同じ、つまり無差別であり、また、ポートフォリオＣとＤも無差別である。しかし、ＡとＢによる効用の大きさと、ＣとＤによる効用の大きさは、リターンが異なるため、リターンの高い前者（ＡとＢ）の効用のほうが大きいことになる。よって、正解はＣとＤである。なお、ＡとＢ、およびＣとＤを通る無差別曲線は以下のとおりである。



問２

リターンに関してはリスク回避者も中立者と同様に高ければ高いほど効用を高めることになるが、リスクに関しては小さい方が効用を高める。したがって、４つのポートフォリオのうちリターンが一番高く、かつ、リスクの一番小さなＡがリスク回避者Ｙの効用を最も高めることになる。よって、正解はＡである。なお、Ａを通る無差別曲線とＣを通る無差別曲線は次のとおりである。



例題５

《2023（秋）．５．Ⅰ．２》

投資家のリスク回避度に関する次の記述のうち、正しいものはどれか。

Ａ　リスク回避度を高くすると、保有資産額 W にフェアギャンブル $\tilde{\varepsilon}$ を加えた $W+\tilde{\varepsilon}$ に対する確実性等価額は低下する。

Ｂ　くじ $\tilde{\varepsilon}$ がフェアギャンブルならば、$\tilde{\varepsilon}$ の期待値は必ずプラスになる。

Ｃ　リスク回避型の投資家は、資産 W を保有するよりも、W にフェアギャンブル $\tilde{\varepsilon}$ を加えた $W+\tilde{\varepsilon}$ を保有する方を選ぶ。

Ｄ　リスク回避度は効用関数の１階微分のみに依存する。

解答　Ａ

解　説

A　正しい。

B　フェアギャンブルとは期待値がゼロのくじ $\tilde{\varepsilon}$ をいう。

C　リスク回避型の投資家は、$\tilde{\varepsilon}$ を加えない方を選ぶ。

D　リスク回避度は、効用関数の 1 階微分に加えて、 2 階微分も用いる。

4　ポートフォリオ理論

Point ① ポートフォリオの投資収益率

証券iと証券jの２つの証券からだけ構成されるポートフォリオPを考える。いま、ポートフォリオPには、証券iと証券jが、w_i：w_j（ただし、$w_i + w_j = 1$）の割合で含まれているとする（ここで、w_iとw_jをそれぞれ証券iと証券jの投資比率という）。このとき、証券iの投資収益率がR_iであり、証券jの投資収益率がR_jであるとすれば、ポートフォリオPの投資収益率R_Pは次のように表される。

$$R_P = w_i R_i + w_j R_j \qquad (1\text{-}1)$$

ただし、　$w_i + w_j = 1$

この関係式において、個別証券の投資収益率（R_iとR_j）を確率変数とみなした場合、ポートフォリオPの投資収益率R_Pも確率変数となることに注意すること。

Point ② ポートフォリオのリターン

ポートフォリオPのリターンは、ポートフォリオの投資収益率R_Pの期待値（期待投資収益率）によって測られる。証券iと証券jだけから構成されるポートフォリオの投資収益率（式（１‐１）の期待値$E(R_P)$）を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} E(R_P) &= E(w_i R_i + w_j R_j) \\ &= E(w_i R_i) + E(w_j R_j) \\ &= w_i E(R_i) + w_j E(R_j) \end{aligned}$$

Point ③ ポートフォリオのリスク

ポートフォリオPのリスクは、ポートフォリオの投資収益率R_Pの分散、または、標準偏差によって測られる。

(1) **共分散**

$$Cov(R_i,R_j)=p_1\left(R_{1,i}-E(R_i)\right)\left(R_{1,j}-E(R_j)\right)+\cdots$$
$$+p_n\left(R_{n,i}-E(R_i)\right)\left(R_{n,j}-E(R_j)\right)$$
$$=\sum_{t=1}^{n}p_t\left(R_{t,i}-E(R_i)\right)\left(R_{t,j}-E(R_j)\right)$$
$$=E\left[\left(R_i-E(R_i)\right)\left(R_j-E(R_j)\right)\right]$$

ただし、

n　：証券i，jの投資収益率のとりうる値の個数

$R_{t,i}$：証券iの収益率のとりうる値のうち第t番目の投資収益率

p_t　：証券i，jの収益率のとりうる値のうち第t番目の投資収益率が実現する確率

(2) **相関係数**

確率変数とみなした証券iと証券jの投資収益率間の相関係数ρ_{ij}は、次のように定義される。

$$\rho_{ij}=\frac{Cov(R_i,R_j)}{\sigma_i\ \sigma_j}$$

これより

$$Cov(R_i,\ R_j)=\rho_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j$$

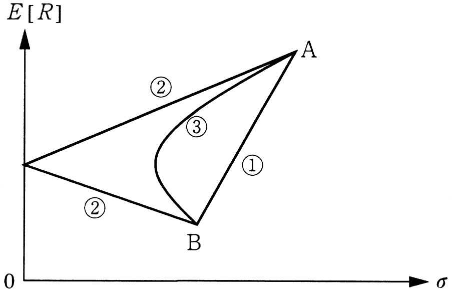
(3) **ポートフォリオの分散と標準偏差**

証券iと証券jだけから構成されるポートフォリオの投資収益率（式（1-1））の分散σ_P^2を求めると次のようになる。

$$\sigma_P^2=E\left\{R_P-E(R_P)\right\}^2$$
$$=E\left\{(w_iR_i+w_jR_j)-\left(w_iE(R_i)+w_jE(R_j)\right)\right\}^2$$
$$=E\left\{w_i\left(R_i-E(R_i)\right)+w_j\left(R_j-E(R_j)\right)\right\}^2$$
$$=E\left\{w_i^2\left(R_i-E(R_i)\right)^2+w_j^2\left(R_j-E(R_j)\right)^2+2w_iw_j\left(R_i-E(R_i)\right)\left(R_j-E(R_j)\right)\right\}$$
$$=w_i^2E\left\{R_i-E(R_i)\right\}^2+w_j^2E\left\{R_j-E(R_j)\right\}^2+2w_iw_jE\left\{\left(R_i-E(R_i)\right)\left(R_j-E(R_j)\right)\right\}$$
$$=w_i^2\sigma_i^2+w_j^2\sigma_j^2+2w_iw_jCov\left(R_i,\ R_j\right)$$
$$=w_i^2\sigma_i^2+w_j^2\sigma_j^2+2w_iw_j\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

Point ④ 投資機会集合

図１－４－１　相関係数と投資機会集合



①　正の完全相関（$\rho_{AB} = +1$）

　　証券A、Bを表す点を結んだ直線

②　負の完全相関（$\rho_{AB} = -1$）

　　証券A、Bを表す点を通る折れ線

③　$-1 < \rho_{AB} < +1$

　　証券A、Bを表す点を通る双曲線

Point ⑤ ポートフォリオ効果

証券iと証券jだけから構成されるポートフォリオの投資収益率の分散 σ_P^2 は次のようであった。

$$\sigma_P^2 = w_i^2\sigma_i^2 + w_j^2\sigma_j^2 + 2w_i w_j Cov\left(R_i,\ R_j\right)$$

$$= w_i^2\sigma_i^2 + w_j^2\sigma_j^2 + 2w_i w_j \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

これより、ポートフォリオの投資収益率の標準偏差 σ_P は次のように表される。

$$\sigma_P = \sqrt{w_i^2\sigma_i^2 + w_j^2\sigma_j^2 + 2w_i w_j \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j}$$

この式において、相関係数が

$$-1 \leqq \rho_{ij} \leqq 1$$

の間の値をとることに注意すれば、両証券に正の比率で投資する場合にはポートフォリオの投資収益率の標準偏差には次のような関係が成立する。

$$\begin{aligned}\sigma_P &= \sqrt{w_i^2\sigma_i^2 + w_j^2\sigma_j^2 + 2w_i\, w_j\, \rho_{ij}\, \sigma_i\, \sigma_j}\\ &\leqq \sqrt{(w_i\sigma_i + w_j\sigma_j)^2}\\ &= w_i\, \sigma_i + w_j\, \sigma_j\end{aligned}$$

この関係式より、ポートフォリオの標準偏差で測ったリスクは、証券iと証券jのそれぞれの投資収益率の標準偏差をその投資比率で加重した値（$w_i\, \sigma_i + w_j\, \sigma_j$）よりも小さいか（$-1 \leqq \rho_{ij} < 1$のとき）、または同じとなる（$\rho_{ij} = 1$のとき）ことがわかる。このことは、複数の証券に分散して投資することによって、**ポートフォリオのリスクが構成証券のリスクの加重平均以下に下がる**ことを意味している。この効果は、**ポートフォリオ効果**、または、**分散投資の効果**と呼ばれている。

例題 6

以下の問 1 から問 3 に答えよ。

証券Ｘと証券Ｙの投資収益率の期待値（年率）、標準偏差（年率）、および共分散は（表）の通りである。

（表）証券Ｘと証券Ｙのリスク・リターン構造

	証券Ｘ	証券Ｙ
期 待 値	6％	10％
標準偏差	12％	27％
共 分 散	81	

問 1　証券Ｘと証券Ｙの収益率の相関係数は、次のうちどれか。

A　−0.35

B　　0.00

C　＋0.25

D　＋0.65

問 2　総投資金額１億円のうち、6,000万円を証券Ｘ、4,000万円を証券Ｙに投資した場合、このポートフォリオの期待収益率と収益率の標準偏差の組み合わせとして、正しいものは次のうちどれか。

A　7.6％　　14.4％

B	7.6%	18.0%
C	8.2%	15.6%
D	8.2%	19.5%

問３　問２のポートフォリオの投資収益率が正規分布に従うものとして、次の記述のうち正しいものはどれか。

A　このポートフォリオの投資収益率が＋22%以上の値をとる確率は約３%である。

B　このポートフォリオの投資収益率は約68%の確率で－6.8%から＋22%の間の値をとる。

C　このポートフォリオの投資収益率が－6.8%以下の値をとる確率は約５%である。

D　このポートフォリオの投資収益率は正規分布に従うと仮定しているので、事前にどのような値をとりうるかを推定することはできない。

解答　問１　C　　問２　A　　問３　B

解　説

問１　相関係数

証券Ｘの投資収益率R_Xと証券Ｙの投資収益率R_Yの相関係数$\rho_{X,Y}$は次のように計算される。

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(R_X, R_Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

ただし、$Cov(R_X, R_Y)$：証券Ｘと証券Ｙの投資収益率の共分散、

σ_X：証券Ｘの投資収益率の標準偏差、

σ_Y：証券Ｙの投資収益率の標準偏差。

したがって、証券Ｘと証券Ｙの収益率の相関係数は、

$$\rho_{X,Y} = \frac{81}{12\times 27} = +0.25$$

となる。

問２　ポートフォリオの期待収益率と標準偏差

２証券で構成されるポートフォリオの期待収益率$E(R_P)$、および収益率の標準偏差σ_Pは次のように計算される。

$$E(R_P) = w_X E(R_X) + w_Y E(R_Y)$$

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_P^2}$$

$$= \sqrt{w_X^2 \sigma_X^2 + w_Y^2 \sigma_Y^2 + 2 w_X w_Y Cov(R_X, R_Y)}$$

ただし、w_X：証券Ｘへの投資比率、w_Y：証券Ｙへの投資比率。

ここで、w_X＝0.6、w_Y＝0.4なので、このポートフォリオの期待収益率と標準偏差は、

$$E(R_P) = 0.6\times 6\% + 0.4\times 10\% = 7.6\%$$

$$\sigma_p = \sqrt{0.6^2\times 12^2 + 0.4^2\times 27^2 + 2\times 0.6\times 0.4\times 81}$$

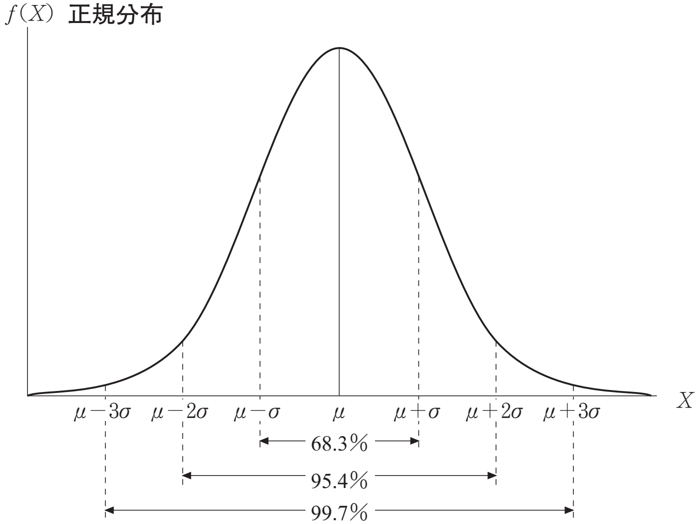
$$= 14.4\%$$

となる。

問３　正規分布の性質（「数量分析」関連問題）

ポートフォリオの投資収益率が平均（期待値）：μ、標準偏差：σの正規分布に従うとき、このポートフォリオの投資収益率が$\mu-\sigma$から$\mu+\sigma$の間に収まる確率は約68.3％であることが知られている。さらに、$\mu-2\sigma$から$\mu+2\sigma$の間に収まる確率は約95.4％、$\mu-3\sigma$から$\mu+3\sigma$の間に収まる確率は約99.7％であることが知られている。したがって、問２のポートフォリオの投資収益率が－6.8％（＝7.6％－14.4％）から＋22％（＝7.6％＋14.4％）の間に収まる確率は約68％である。

なお、Ａ　このポートフォリオの投資収益率が＋22％以上の値をとる確率、およびC　このポートフォリオの投資収益率が－6.8％以下の値をとる確率はいずれも約16％（＝（100％－68％）÷２）である（グラフ参照）。



例題７

以下の問１および問２に答えよ。

SP500株価指数の１年物金利に対する超過収益率は平均（μ）６％、標準偏差（σ）20％の正規分布で近似できるといわれる。必要に応じて標準正規分布表を使い、以下の設問に解答せよ。

問１　95％信頼区間（真の超過収益率の平均（μ）が95％の確率でとりうる範囲）を求めよ。

問２　現在の１年物金利は４％である。SP500の収益率がマイナスになる確率を求めよ。

標準正規分布表（抜粋）

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916

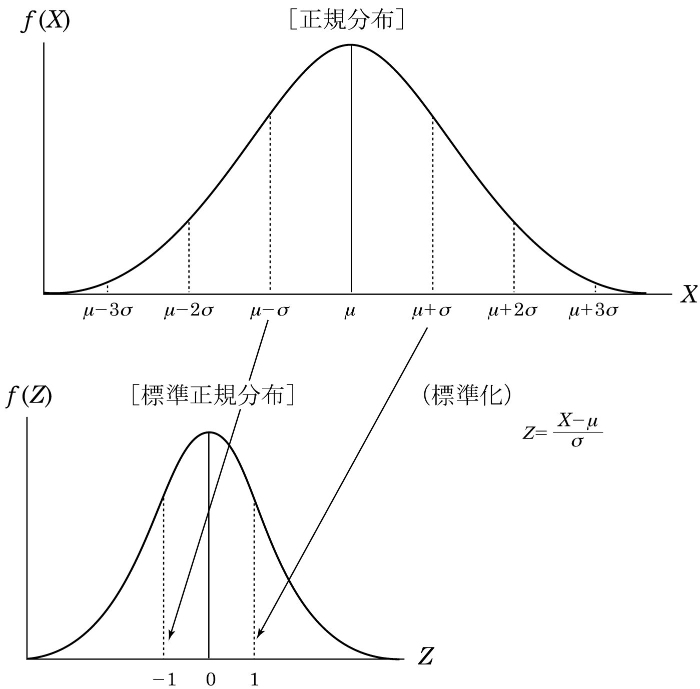
解答

問 1　$-33.2\% \leqq \mu \leqq 45.2\%$
問 2　30.85%

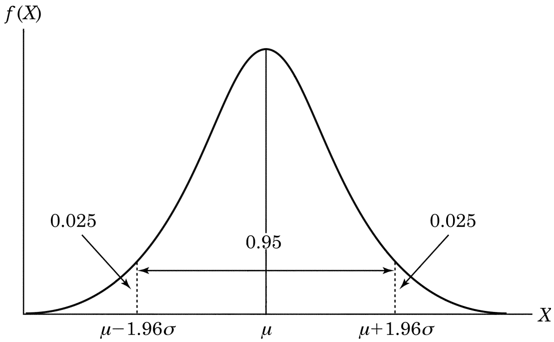
解　説

正規分布の問題である。ポイントは次の 3 点。

- 正規分布は左右対称である
- 正規分布の標準化
- 標準正規分布表を読みとる



問１　正規分布で95％信頼区間は±1.96σであるから、６％±1.96×20％＝＋45.2％or－33.2％。したがって95％信頼区間は〔－33.2％、＋45.2％〕。



標準正規分布表から±1.96を読みとる（なお、1.00－0.025＝0.975に注意）。

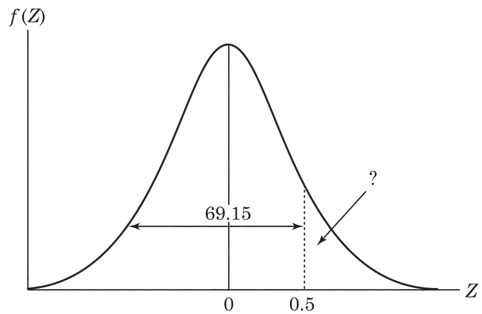
→小数第２位

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮										
1.7										
1.8										
1.9							.9750			
2.0										
2.1										
⋮										

↑
小数第１位まで

問２　SP500の収益率をR（％）とする。短期金利（i）が４％、超過収益率（$R-i\equiv x$）の平均が６％だから、SP500の収益率（R）の期待値は10％である。つまり、SP500の収益率がマイナス（$R<0$）になるのは、超過収益率が－４％を下回る（$x<-4$）ときである。ここで、超過収益率の平均（μ）が６％、標準偏差（σ）が20％であることに注意して、SP500の収益率がマイナス（$R<0$）になるz値を求めれば、$z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}<\dfrac{-4-6}{20}=-0.5$である。よって、SP500の収益率がマイナスになる確率Prob$\{R<0\}$は、$z<-0.5$となる確率Prob$\{z<-0.5\}$に等しい。

次に、Prob$\{z<-0.5\}$を求めるには、標準正規分布表を用いる。ただし、問題で与えられた標準正規分布表には$z=-0.5$はないので、正規分布が左右対称であることを利用して、$z>0.5$となる確率Prob$\{z>0.5\}$（下図の右側「？」部分の面積）を求める。



	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.5	.6915									

標準正規分布表より、$z\leqq 0.5$となる確率Prob$\{z\leqq 0.5\}$が0.6915だから、求める確率は、

$$\mathrm{Prob}\{z>0.5\}=1-\mathrm{Prob}\{z\leqq 0.5\}=1-0.6915=0.3085=30.85\%$$

Point ⑥ 最適ポートフォリオ

(1) 効率的フロンティア（リスク資産のみの場合）

投資家の意思決定の問題は、

① リスクとリターンの組合せとしてどのような選択肢が存在するか？
（制約条件の問題）

② 選択可能な投資機会のうち最も高い効用を与えるものは何か？
（効用最大化の問題）

という２つの問題であった。

これらについて、①は投資機会集合、②は投資家の選好を表す無差別曲線を用いて、期待収益率と収益率の標準偏差という２パラメータの平面上で定式化することができた。

ポートフォリオ理論では、通常、先にあげた３タイプの投資家のうち、合理的な投資家としてリスク回避型の投資家に限定して考察する。その場合、選択対象として投資機会集合全体を考える必要はない。リスク回避型の投資家は、

・リターンが同じであれば、リスクの最も小さい投資案を好ましいと判断

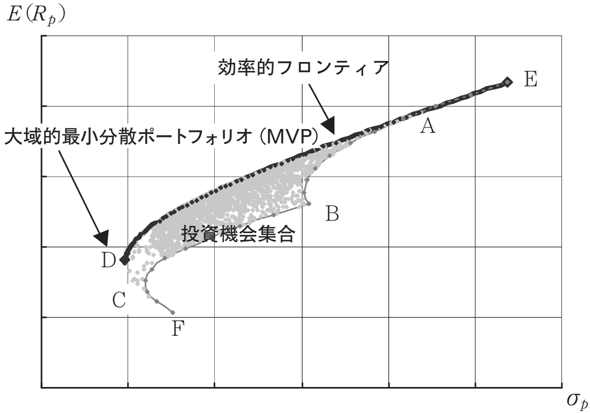
・リスクが同じであれば、リターンの最も大きい投資案を好ましいと判断

するため、次の図１－４－２において双曲線の上半分（傾きが正の部分）ＥＤのみを選択対象と考えればよい。

ここで、リターンを一定としたときリスクが最小となるポートフォリオを**最小分散ポートフォリオ**、さまざまなリターンに対する最小分散ポートフォリオの軌跡を**最小分散フロンティア**という。曲線EDFが最小分散フロンティアであり、この曲線上の点が最小分散ポートフォリオである。

また、フロンティア、リスクを一定としたときリターンが最大となるポートフォリオを**効率的ポートフォリオ**、さまざまなリスクに対する効率的ポートフォリオの軌跡を**効率的フロンティア**という。この曲線EDが効率的フロンティアであり、この曲線上の点が効率的ポートフォリオである。

図１－４－２　効率的フロンティア



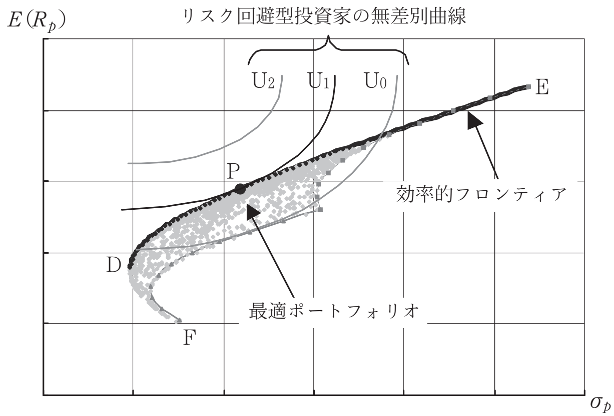
ここで、簡単に、投資機会集合の各部分の名称をまとめておこう。

最小分散フロンティア（minimum variance frontier）：曲線EDF
最小分散ポートフォリオ（minimum variance portfolio）：曲線EDF上の点
大域的最小分散ポートフォリオ（MVP：minimum variance portfolio）：点D
効率的フロンティア（efficient frontier）：曲線ED
効率的ポートフォリオ（efficient portfolio）：曲線ED上の点

⑵　最適ポートフォリオ

投資家のポートフォリオ選択は「投資機会集合の中から、効用を最大化する投資案を選択する」問題として定式化できた。リスク回避型の投資家にとっては投資機会集合のうち効率的フロンティアだけ考慮に入れればよいので、**「効率的フロンティアの中から効用を最大にする投資案を選択する」**問題に定式化し直すことができる。

図１－４－３　効率的フロンティアと最適ポートフォリオ（リスク資産のみ）



リスク回避型の投資家の無差別曲線は期待収益率$E[R_p]$－標準偏差（σ_p）平面上で図の曲線Uで示される。左上方の無差別曲線ほどその期待効用の水準は高いのであるから、**選択可能な範囲ではU_1と効率的フロンティアが接する点Pにおいて投資家は最も高い効用水準を実現することができる。**というのは、U_1はU_0よりも高い効用水準を示しているので合理的投資家はU_1線上を選好し、また、U_2は選択可能なポートフォリオと交点を持たないため実現不可能であるからである。

以上から、最適ポートフォリオは、効率的フロンティア上で投資家の無差別曲線と接する点で表されることになる。

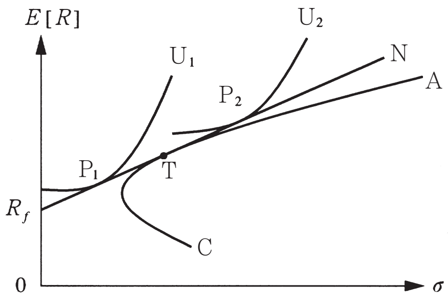
ところで、最適ポートフォリオPはどのようにすればできるだろうか？効率的ポートフォリオであるPは、最小分散フロンティア上にある異なる２つのポートフォリオを組み合わせることによって作成できることが知られており、これを**２基金分離定理**（two-fund separation theorem）という。

〔２基金分離定理〕

効率的フロンティア上に位置するどんなポートフォリオも、異なる２つの最小分散ポートフォリオから構築することができる。

(3)　効率的フロンティア（無リスク資産が存在する場合）

図１－４－４　効率的フロンティアと最適ポートフォリオ（無リスク資産あり）



①　無リスク資産の導入

・リスク資産と無リスク資産が存在する場合、効率的フロンティアは無リスク資産を示す点R_f（リスクフリー・レート）からリスク資産の投資機会集合を示す双曲線Ａ－Ｔ－Ｃに引いた接線R_f－Ｔ－Ｎになる。

・点Ｔはリスク資産のみから構成される唯一の効率的ポートフォリオであり、**接点ポートフォリオ**という。無リスク資産が存在すると、一義的に決り、(3)の**トービンの分離定理**が成立する。

②　最適ポートフォリオ

P_1：投資家１の最適ポートフォリオ（貸付ポートフォリオ）

w_f：w_i ＝ P_1－Ｔ：P_1－R_f の投資比率で無リスク資産とリスク資産に投資

P_2：投資家２の最適ポートフォリオ（借入ポートフォリオ）

リスクフリー・レートで借入れ、すべてリスク資産（接点ポートフォリオ）に投資

③　トービンの分離定理

無リスク資産とリスク資産が存在する場合、投資家が最適ポートフォリオを選択する意思決定と、リスク資産のみから構成されるポートフォリオ（Ｔ）の決定とは分離可能である。

例題 8

《2024（秋）．5．Ⅱ．4》

以下の問に答えよ。

ある投資家の効用関数Uは、期待リターンμとリスクσを用いて、以下の式で表される。ただし、γは投資家のリスク回避度（$\gamma > 0$）である。

$$U = \mu - \frac{\gamma}{2}\sigma^2$$

この投資家が株式X（期待リターン７％、リスク（リターンの標準偏差）20%）と安全資産（リスクフリー・レート１％）を組み合わせて効用関数Uを最大化するポートフォリオQを構築する。

この投資家のリスク回避度γが２のとき、株式Xへの投資比率はいくらですか。

A　25%

B　33%

C　50%

D　67%

E　75%

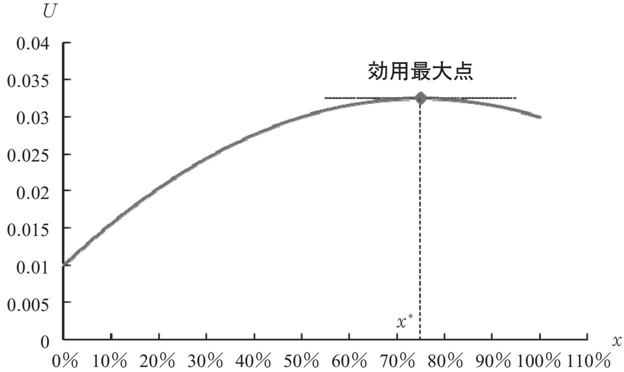
解答　E

解　説

株式Xへの投資比率をxとして効用関数Uに所与の数値を代入し、式を整理する。なお、こういったポートフォリオの「最適化」の計算問題の場合、パーセント（%）表示は使わず、必ず小数で計算することに注意。

$$\begin{aligned} U &= \mu - \frac{\gamma}{2}\sigma^2 \\ &= \underbrace{0.07 \times x + 0.01 \times (1 - x)}_{\mu} - \frac{2}{2}\underbrace{\times 0.2^2 \times x^2}_{\sigma^2} \\ &= -0.04x^2 + 0.06x + 0.01 \end{aligned}$$

上記の関数は２次式であり、２次の項の係数がマイナスだから横軸にx（株式Xの投資比率）、縦軸に投資家の効用Uをとると上に凸のグラフとなる（凹関数）。この頂点に位置する点に対応する横軸上のx^*が「効用関数Uを最大化するポートフォリオQの株式Xへの投資比率」である。



上記の関数上の他の点は接線に傾きがあるが、頂点に位置する点だけは接線の傾きがゼロである。したがって、上記関数を株式Xの投資比率xで微分し、ゼロとおくことにより効用を最大化するポートフォリオQの株式Xへの投資比率が求められる。

$$\frac{dU}{dx} = -2\times0.04x+1\times0.06$$
$$= -0.08x+0.06 = 0$$
$$x = \frac{0.06}{0.08} = 75\%$$