

第 1 章

株式価値評価と株式ポートフォリオ戦略

この章のポイント

この章では、株式価値評価と株式ポートフォリオ戦略の2つの論点を学習します。

株式価値評価については、1 次試験でも出題されている、配当割引モデルを中心とした内容の復習です。株式ポートフォリオ戦略では、ポートフォリオ理論の確認から始まり、それを基礎にマーケットモデルや3ファクター・モデルといった、ファクター・モデルによるポートフォリオのリターン分析について学習します。また、9 節以降では出題ポイントとなっている、パッシブ運用、アクティブ運用などの具体的な株式ポートフォリオ戦略の特徴や構築手法、その他売買執行戦略のコスト分析といった、実務的な論点について学習していきます。

1 株式価値評価モデル

☆☆☆

株式価値評価は、企業価値および個別株式価値の評価方法に関するもので、アクティブ運用の「個別銘柄選択」と密接である。大部分が「コーポレート・ファイナンス」と重複するため、ここでは代表的なモデルについて整理しておく。

1 配当割引モデル (DDM : Dividend Discout Model)

ある株式 1 株の保有によって将来得られるキャッシュフローを配当金とする。将来の配当金を株主の要求収益率（株主資本コスト）で現在価値に割り引き、その合計を理論株価 P とする。

$$P_0 = \frac{D_1}{1+k_1} + \frac{D_2}{(1+k_2)^2} + \frac{D_3}{(1+k_3)^3} + \dots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k_t)^t}$$

ただし、 P_0 : 理論株価、 D_t : t 期の配当金、

k_t : t 期の株主の要求収益率（株主資本コスト）。

配当割引モデル (DDM) の「基本形」に以下のような仮定を設け、現実にご利用可能なモデルに加工する。まず、毎期の株主資本コスト（割引率） k を一定とすると、DDM はかなりシンプルになる。

$$P_0 = \frac{D_1}{1+k} + \frac{D_2}{(1+k)^2} + \frac{D_3}{(1+k)^3} + \dots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k)^t}$$

毎期の配当が D で一定とすると、「定額配当モデル（ゼロ成長モデル）」が導かれる。

$$P_0 = \frac{D}{1+k} + \frac{D}{(1+k)^2} + \frac{D}{(1+k)^3} + \dots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D}{(1+k)^t} = \frac{D}{k}$$

配当金が毎期一定率 g で成長すると「定率成長モデル」が導かれる。

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{D_1}{1+k} + \frac{D_2}{(1+k)^2} + \frac{D_3}{(1+k)^3} + \dots \\ &= \frac{D_1}{1+k} + \frac{D_1(1+g)}{(1+k)^2} + \frac{D_1(1+g)^2}{(1+k)^3} + \dots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_1(1+g)^{t-1}}{(1+k)^t} = \frac{D_1}{k-g} \end{aligned}$$

ただし D_1 : 1 期後（期末）配当金。

株主の要求収益率（株主資本コスト） k は、証券アナリスト試験では CAPM などでも推定する場合が多い。

$$\begin{aligned} k &= E[R_i] \\ &= \beta_i \times (E[R_M] - R_f) + R_f \end{aligned}$$

ただし、 $E[R_i]$: 株式 i の期待収益率、 β_i : 株式 i の対市場ベータ、

$E[R_M]$: 市場ポートフォリオの期待収益率、 R_f : リスクフリー・レート。

また、配当金の成長率 g は、証券アナリスト試験ではサステイナブル成長率（P/L、B/S の全項目が同じ比率で成長し、すべての財務比率が一定に保たれる成長率）が用いられる場合が多い。

$$g = ROE \times \text{内部留保率} = ROE \times (1 - \text{配当性向})$$

配当割引モデル（DDM : dividend discount model）

- 1) 定額配当モデル（ゼロ成長モデル）

$$P_0 = \frac{D}{k}$$

- 2) 定率成長モデル

$$P_0 = \frac{D_1}{k - g}$$

- 3) 株主の要求収益率（株主資本コスト）…CAPM

$$k = \beta_i (E[R_M] - R_f) + R_f$$

- 4) 配当成長率…サステイナブル成長率

$$g = ROE \times \text{内部留保率} = ROE \times (1 - \text{配当性向})$$

2 エクイティ DCF (Discounted Cash Flow) 法

株主に帰属するフリー・キャッシュフローを FCFE (Free Cash Flow to Equity) とし、この割引現在価値の合計により株式価値を評価する方法である。協会通信テキストでは、この方法を「割引キャッシュフロー (DCF : Discounted Cash Flow) 法」の 1 つとしている。

割引キャッシュフローの「キャッシュフロー」は、株主に帰属するフリー・キャッシュフローなので、株式価値 (V : Value) を評価するモデルである。割引率には株主資本コスト k を用いる。

$$V_0 = \frac{FCFE_1}{1+k_1} + \frac{FCFE_2}{(1+k_2)^2} + \frac{FCFE_3}{(1+k_3)^3} + \dots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{FCFE_t}{(1+k_t)^t}$$

ただし、 V_0 : 株式価値、 $FCFE_t$: t 期のフリー・キャッシュフロー、
 k_t : t 期の株主資本コスト。

株主に帰属するフリー・キャッシュフロー (FCFE) は、以下のように計算される。

$$FCFE = \text{親会社株主に帰属する当期純利益} + \text{減価償却費} \\ - \text{設備投資額} - \text{正味運転資本増加額} + \text{負債増加額}$$

エクイティ DCF 法を用いても、配当割引モデル (DDM) を用いても「株式価値」、「株価」について同じ結果が得られる。ただし以下のような場合、将来の配当の予想よりもキャッシュフローの予想の方が容易なため、実際にはエクイティ DCF 法のようなフリーキャッシュフロー割引モデルが用いられるケースが多いとされる (協会通信テキスト・証券分析とポートフォリオ・マネジメント・第 1 回「株式価値評価と株式ポートフォリオ戦略」p.17)。

- ・無配企業の場合、将来の配当の予想が難しい。
- ・実際の配当が配当支払い能力と大きく異なる場合、収益予想から配当の予想を導けない。
- ・キャッシュフローが企業収益と連動している場合、収益予想がキャッシュフローの予想に直結する。

なお、フリーキャッシュフロー割引モデルの計算問題は、おそらく毎期の資本コスト (割引率) が一定、フリーキャッシュフローが毎期一定率で成長する「定率成長モデル」として出題されるだろう。考え方は配当割引モデルの定率成長モデルと同じである。

エクイティ DCF 法

$$V_0 = \frac{FCFE_1}{1+k} + \frac{FCFE_2}{(1+k)^2} + \frac{FCFE_3}{(1+k)^3} + \dots \\ = \frac{FCFE_1}{1+k} + \frac{FCFE_1(1+g)}{(1+k)^2} + \frac{FCFE_1(1+g)^2}{(1+k)^3} + \dots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{FCFE_1(1+g)^{t-1}}{(1+k)^t} = \frac{FCFE_1}{k-g}$$

ただし、 V_0 : 株式価値、 $FCFE_1$: 1 期後 (期末) フリーキャッシュフロー、
 k : 株主の要求収益率、 g : サステイナブル成長率。

株主に帰属するフリー・キャッシュフロー（FCFE）

$$FCFE = \text{親会社株主に帰属する当期純利益} + \text{減価償却費} \\ - \text{設備投資額} - \text{正味運転資本増加額} + \text{負債増加額}$$

エクイティ DCF 法（定率成長モデル）

$$V_0 = \frac{FCFE_1}{k - g}$$

ただし、 $FCFE_1$ ：1 期後（期末）フリーキャッシュフロー、
 k ：株主の要求収益率、 g ：サステイナブル成長率。

3 残余利益モデル

クリーンサープラス関係を前提として配当割引モデルを展開すると、残余利益モデルが導かれる。残余利益モデルによれば、理論株価は期首 1 株当たり株主資本 (BPS) に将来の残余利益の割引現在価値を加えたものとして評価される。

残余利益とは、株主の必要収益を超過した利益 (超過利益) である。

$$\begin{aligned}\text{残余利益} &= \underbrace{\text{期首自己資本} \times ROE}_{\text{純利益}} - \underbrace{\text{期首自己資本} \times k}_{\text{必要収益}} \\ &= \text{期首自己資本} \times (ROE - k)\end{aligned}$$

ただし、 ROE : 自己資本利益率、 k : 株主の要求収益率。

したがって、1 株当たりの残余利益は以下のようになる。

$$\begin{aligned}\text{1株当たり残余利益} &= BPS_0 \times ROE - BPS_0 \times k \\ &= BPS_0 \times (ROE - k)\end{aligned}$$

ただし、 BPS_0 : 期首 1 株当たり株主資本。

理論株価 P は以下のように計算される。

$$\begin{aligned}P_0 &= BPS_0 + \frac{(ROE_1 - k_1)BPS_0}{1 + k_1} + \frac{(ROE_2 - k_2)BPS_1}{(1 + k_2)^2} + \frac{(ROE_3 - k_3)BPS_2}{(1 + k_3)^3} + \dots \\ &= BPS_0 + \underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} \frac{(ROE_t - k_t)BPS_{t-1}}{(1 + k_t)^t}}_{\text{残余利益の現在価値合計}}\end{aligned}$$

ただし、 ROE_t : t 期の自己資本利益率、

k_t : t 期の株主の要求収益率 (株主資本コスト)

BPS_{t-1} : t 期首の 1 株当たり株主資本。

残余利益モデルの計算問題は、おそらく毎期の株主資本コスト (要求収益率) および ROE が一定、残余利益が每期一定率で成長する「定率成長モデル」として出題されるだろう。考え方は配当割引モデルの定率成長モデルと同じである。

$$\begin{aligned}P_0 &= BPS_0 + \frac{(ROE - k)BPS_0}{1 + k} + \frac{(ROE - k)BPS_1}{(1 + k)^2} + \frac{(ROE - k)BPS_2}{(1 + k)^3} + \dots \\ &= BPS_0 + \frac{(ROE - k)BPS_0(1 + g)}{(1 + k)^2} + \frac{(ROE - k)BPS_0(1 + g)^2}{(1 + k)^3} + \dots \\ &= BPS_0 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(ROE - k)BPS_0(1 + g)^{t-1}}{(1 + k)^t} \\ &= BPS_0 + \frac{(ROE - k)BPS_0}{k - g}\end{aligned}$$

残余利益モデル

残余利益： 残余利益 = 期首自己資本 $\times (ROE - k)$

1株当たり残余利益： 1株当たり残余利益 = $BPS_0 \times ROE - BPS_0 \times k$
 $= BPS_0 \times (ROE - k)$

残余利益モデル（定率成長モデル）： $P_0 = BPS_0 + \frac{(ROE - k)BPS_0}{k - g}$

2 企業価値評価

☆☆☆

1 エンタープライズDCF（Discounted Cash Flow）法

企業全体の資本提供者（株主と債権者）に帰属するフリー・キャッシュフローをFCFF（Free Cash Flow to Firm）とし、この割引現在価値の合計により企業価値を評価する方法である。エクイティ DCF 法と同様に「割引キャッシュフロー（DCF：Discounted Cash Flow）法」の1つに位置づけられる。

割引キャッシュフローの「キャッシュフロー」は、企業全体の資本提供者に帰属するフリー・キャッシュフローなので、企業価値（EV：Enterprise Value）を評価するモデルである。割引率には企業全体の資本提供者、すなわち株主と債権者の「加重平均資本コスト（WACC：Weighted Average Cost of Capital）」を用いる。

$$EV_0 = \frac{FCFF_1}{1+WACC_1} + \frac{FCFF_2}{(1+WACC_2)^2} + \frac{FCFF_3}{(1+WACC_3)^3} + \dots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{FCFF_t}{(1+WACC_t)^t}$$

ただし、 EV_0 ：企業価値、 $FCFF_t$ ：t期のフリー・キャッシュフロー、 $WACC_t$ ：t期の加重平均資本コスト。

企業全体の資本提供者に帰属するフリー・キャッシュフロー（FCFF）は、以下のよう
に計算される。

$$FCFF = \text{税引後営業利益} + \text{減価償却費} - \text{設備投資額} - \text{正味運転資本増加額}$$

ここで税引後営業利益（NOPAT：Net Operating Profit After Taxes）は以下の通り。

$$NOPAT = \text{営業利益} \times (1 - \text{法人税率})$$

割引率の加重平均資本コスト（WACC：Weighted Average Cost of Capital）は、以下の
ように計算される。

$$WACC = \frac{D}{D+E} \times k_D \times (1-T) + \frac{E}{D+E} \times k_E$$

ただし、 D ：負債価値、 E ：株式価値、 k_D ：負債コスト、 T ：実効税率、 k_E ：株主資本コスト。

負債コスト k_D は、以下の有利子負債利率を用いる場合が多い。

$$k_D = \frac{\text{支払利息}}{\text{有利子負債残高（期首・期末平均）}}$$

証券アナリスト試験の計算問題では、株主資本コスト k_E は配当割引モデル同様、CAPMに基づく期待収益率を用いる場合が多いだろう。

$$k_E = \beta_i (E[R_M] - R_f) + R_f$$

このようにして求められた企業価値から負債価値を引いて、株式価値を計算する。

$$\text{株式価値} = \text{企業価値}(EV) - \text{負債価値}$$

なお、エクイティ DCF 法同様に、毎期の資本コスト（割引率）が一定、フリーキャッシュフローが毎期一定率で成長する「定率成長モデル」として出題されるだろう。

エンタープライズ DCF 法

$$EV_0 = \frac{FCFF_1}{1+WACC} + \frac{FCFF_2}{(1+WACC)^2} + \frac{FCFF_3}{(1+WACC)^3} + \dots$$

$$= \frac{FCFF_1}{1+WACC} + \frac{FCFF_1(1+g)}{(1+WACC)^2} + \frac{FCFF_1(1+g)^2}{(1+WACC)^3} + \dots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{FCFF_1(1+g)^{t-1}}{(1+WACC)^t} = \frac{FCFF_1}{WACC-g}$$

ただし、 EV_0 ：企業価値、 $FCFF_1$ ：1 期後（期末）フリーキャッシュフロー、
 $WACC$ ：加重平均資本コスト、 g ：サステイナブル成長率。

企業全体の資本提供者に帰属するフリー・キャッシュフロー（FCFF）

$FCFF$ = 税引後営業利益 + 減価償却費 - 設備投資額 - 正味運転資本増加額

※税引後営業利益（NOPAT：Net Operating Profit After Taxes）

$NOPAT$ = 営業利益 $\times$ (1 - 法人税率)

エンタープライズ DCF 法（定率成長モデル）

$$EV_0 = \frac{FCFF_1}{WACC-g}$$

ただし、 $FCFF_1$ ：1 期後（期末）フリーキャッシュフロー、

$WACC$ ：加重平均資本コスト、 g ：サステイナブル成長率。

加重平均資本コスト

$$WACC = \frac{D}{D+E} \times k_D \times (1-T) + \frac{E}{D+E} \times k_E$$

3 2パラメータ・アプローチ

☆☆☆

1 リターンとリスクの指標－期待収益率と分散・標準偏差－

投資家が自己の資産を金融資産で運用するときには、得られるリターンとそれに伴うリスクを考慮して可能な投資対象の中から、自己にとって最も望ましい投資を選択する。すなわち、投資家は可能な投資機会(投資機会集合)の中から自己の効用を最大にする投資を決定する。このため、投資対象を決定するにあたっては、

① 投資家の選好

リターンとリスクの組合せに対して、投資家はいかなる態度で臨むか？

② 投資機会集合

さまざまな銘柄への投資によって、リターンとリスクの組合せとしてどのような選択肢が存在するか？

という2点を考察する必要がある。

これら2つの問題を、リターンとリスクとの関係に着目して考えていく。

そして、ポートフォリオ理論では、

リターンの尺度……期待収益率 (収益率の期待値)

リスクの尺度……収益率の分散 (または標準偏差)

を用いて分析を進める。このため、**2パラメータ・アプローチ** (2 parameter approach) あるいは**平均・分散アプローチ** (mean-variance approach) とも呼ばれる。

2 投資家の選好

投資家は期待効用を最大にするように行動する。その際、リスクとリターンを評価しながら投資対象を決定する。

一般に、投資家にとって、他の条件が全く同じであれば、リターンが高ければ高いほど望ましい投資対象と考えられるだろう。これに対し、リスクについての評価は投資家によってかなり異なる。経済学では、経済主体をリスクに対する態度によって、

- ① リスク中立的 (risk neutral)
- ② リスク回避的 (risk averse)
- ③ リスク愛好的 (risk loving)

の3つのタイプに分類する。

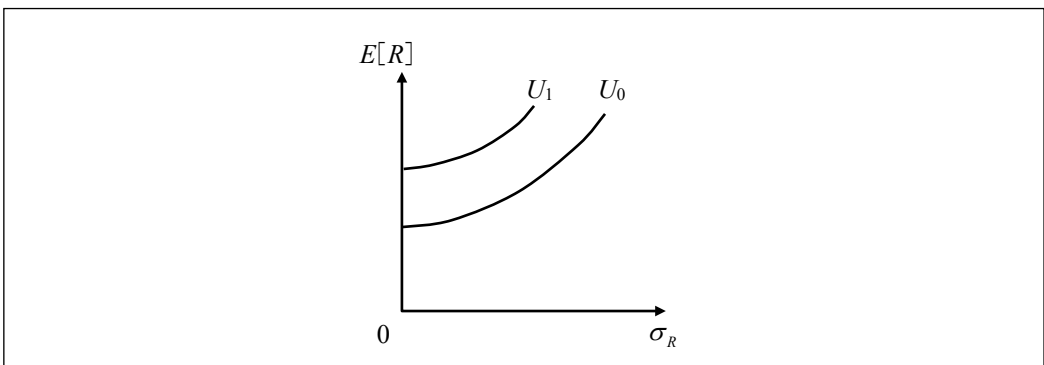
ポートフォリオ理論がその対象とするのは、**リスク回避的な投資家**である。

リスク回避的な投資家は、次のような性格を持つ。

- ・ リスクの程度が同じであればリターンがより高い方を選択する。
- ・ リターンが同じであればリスクの小さい方を選択する。

ここで、リターンの尺度として期待収益率（収益率 R の期待値） $E[R]$ 、リスクの尺度として収益率の標準偏差 σ_R を用いることにすれば、リスク回避的な投資家の選好は次のような右上がりの無差別曲線として描ける。

《リスク回避的な投資家の無差別曲線》

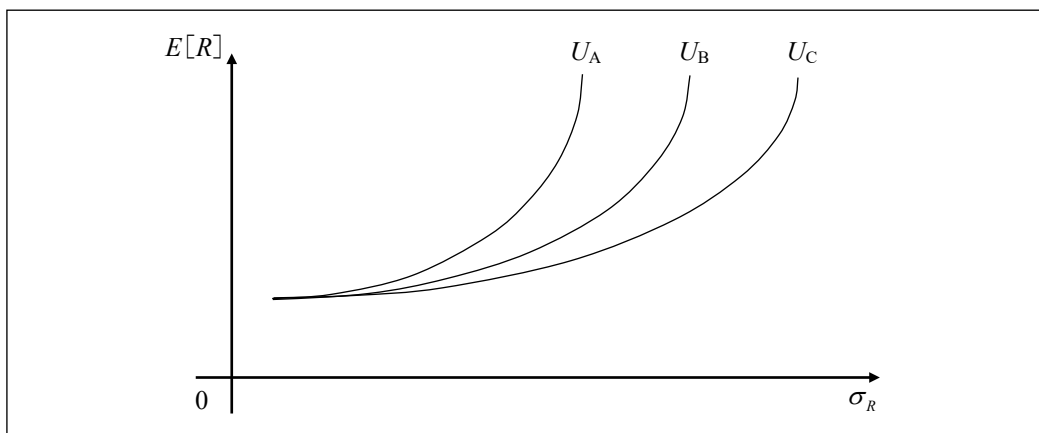


ここでの無差別曲線は、効用が等しくなるリターンとリスクの軌跡である。リスク回避的な投資家の場合、リスクが大きいほど効用は下がるから、同一の効用を維持するためにはそれを補うだけのリターンの向上が必要になる。このため、リスク回避的な投資家の無差別曲線は右上がりの曲線として描ける。

なお、リスク回避的な投資家といっても、投資家の無差別曲線の形状は、投資家ごとに異なる。リスク許容度の大きい投資家に比べ、リスク許容度の小さい投資家の方が、

リスクが大きくなったとき、同一の効用を維持するために必要となるリターンの上昇幅はより大きくならなければならないので、無差別曲線の傾きはより大きくなる。

《リスク許容度と無差別曲線》



上のグラフで、3 人のリスク回避的投資家（A、B、C）について考えると、リスクが高くなるにつれ、より高いリターンを要求しているのは投資家 A である。これに対してリスクが高くなっても要求するリターンの上昇が最も緩やかなのは投資家 C である。これは、リスク許容度によって各投資家の選好が異なるためであり、それぞれのリスク許容度は A、B、C の順にしたがって、次第に大きくなる。

なお、投資家の効用水準については、効用関数として以下のように一般化されることが多い。

$$\begin{aligned} U_i &= \mu_p - \frac{1}{2} \lambda_i \sigma_p^2 \\ &= \mu_p - \frac{1}{2 \tau_i} \sigma_p^2 \end{aligned}$$

U_i : 第 i 番目の投資家の効用 ($i=A, B, C, \dots$)

μ_p : ポートフォリオの期待収益率

σ_p : ポートフォリオの収益率の標準偏差

λ_i : 第 i 番目の投資家のリスク回避度（逆数の τ_i はリスク許容度）

リスク回避的な投資家の場合 $\tau_i > 0$ であり、各投資家 i の選好はこの定数によって決まる。上のグラフの場合、 $\tau_A < \tau_B < \tau_C$ となっており、リスク許容度の大きい投資家ほど τ_i は大きくなるため、この定数はリスク許容度を表す数値となっている。

3 投資機会集合

本論に入る前に、投資の基礎概念をもう一度整理しておこう。

1. リターン

$$\textcircled{1} \text{ 投資収益率 } r = \frac{\text{収 益}}{\text{投資額}}$$

$$\textcircled{2} \text{ 期待収益率 } E[R] = \sum_{i=1}^n P_i r_i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_i : \text{第 } i \text{ 番目の状態の生起確率} \quad \sum_{i=1}^n P_i = 1 \\ R : \text{収益率 (第 } i \text{ 番目の状態における実現値が } r_i \text{)} \end{array} \right.$$

2. リスク

$$\textcircled{1} \text{ 分散 } Var(R) = E[(R - E[R])^2] = \sum_{i=1}^n P_i (r_i - E[R])^2$$

$$\textcircled{2} \text{ 標準偏差 } \sigma_R = \sqrt{Var(R)}$$

3. 共分散 ($Cov(R_X, R_Y)$ あるいは σ_{XY})

$$\begin{aligned} Cov(R_X, R_Y) &= E[(R_X - E[R_X])(R_Y - E[R_Y])] \\ &= \sum_{i=1}^n P_i (r_{X,i} - E[R_X])(r_{Y,i} - E[R_Y]) \end{aligned}$$

4. 相関係数 (ρ_{XY})

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(R_X, R_Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (-1 \leq \rho \leq 1)$$

$$\longrightarrow Cov(R_X, R_Y) = \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y$$

<期待値、分散、共分散の性質> ※X, Y, Z は確率変数、a, b は定数

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

$$E(XY) = E(X)E(Y) \quad (X, Y \text{ が独立の場合})$$

$$Var(aX+b) = a^2 Var(X)$$

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \quad (X, Y \text{ が独立の場合})$$

$$Cov(aX, bY) = ab Cov(X, Y)$$

$$Cov(X+Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$$

(1) ポートフォリオの収益率

n 銘柄の証券に投資する場合を考える。各証券への投資比率をそれぞれ $w_1, w_2, \dots, w_n$ とし、各証券の投資収益率をそれぞれ $R_1, R_2, \dots, R_n$ とする。このとき、ポートフォリオの収益率 R_p は、次式のように投資比率をウェイトとした個別銘柄の収益率の加重平均となる。

ポートフォリオの収益率

$$\begin{aligned} R_p &= w_1 R_1 + w_2 R_2 + \dots + w_n R_n \\ &= \sum_{i=1}^n w_i R_i \\ &= (\text{各証券への投資比率} \times \text{各証券の収益率}) \text{の合計} \\ \text{ただし、} \sum_{i=1}^n w_i &= 1 \end{aligned}$$

(2) ポートフォリオの期待収益率

n 銘柄の証券に投資する場合の期待収益率（収益率の期待値）は、次式のように投資比率をウェイトした個別銘柄の期待収益率の加重平均として表せる。

ポートフォリオの期待収益率

$$\begin{aligned} E(R_p) &= w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2) + \dots + w_n E(R_n) \\ &= \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) \\ &= (\text{各証券への投資比率} \times \text{期待収益率}) \text{の合計} \end{aligned}$$

(3) ポートフォリオの収益率の分散、標準偏差

ポートフォリオの収益率の分散は、投資比率や個別銘柄の収益率の分散（あるいは標準偏差）のほかに各銘柄間の共分散（あるいは相関係数）の影響を受ける。つまり、各銘柄の投資収益率の変動が互いにどのような関係にあるかが、ポートフォリオの収益率の変動を考えるとときに重要な役割を果たす。

(a) 2 銘柄のケース

ポートフォリオの収益率の分散（2 銘柄のケース）

$$Var(R_p) = w_1^2 Var(R_1) + w_2^2 Var(R_2) + 2w_1 w_2 Cov(R_1, R_2) \quad (1.3.1)$$

あるいは、

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 \quad (1.3.2)$$

ただし、 $w_1 + w_2 = 1$

1. (1.3.1) 式で、分散を標準偏差で、共分散を相関係数を用いて $Cov(R_1, R_2) = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2$ と表せば、(1.3.2) 式が得られる。
2. ポートフォリオの期待収益率が各証券の期待収益率の単純な加重平均で示されたのに対し、ポートフォリオの収益率の分散は各証券の収益率の分散の単純な加重平均にはならず、銘柄間の共分散（あるいは相関係数）の影響を受ける。組み入れ証券の間の相関係数が 1 より小さければ、ポートフォリオのリスクは各構成証券のリスク加重平均値未満に抑えることができる。これをポートフォリオのリスク分散効果という。

(b) 3 銘柄のケース

3 証券に投資する場合については、次式のように表される。

ポートフォリオの収益率の分散（3 銘柄のケース）

$$\begin{aligned} Var(R_p) &= w_1^2 Var(R_1) + w_2^2 Var(R_2) + w_3^2 Var(R_3) \\ &\quad + 2w_1w_2Cov(R_1, R_2) + 2w_1w_3Cov(R_1, R_3) \\ &\quad + 2w_2w_3Cov(R_2, R_3) \\ &= \sum_{i=1}^3 w_i^2 Var(R_i) + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^3 w_i w_j Cov(R_i, R_j) \end{aligned}$$

これを標準偏差をベースにして表せば、

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + w_3^2 \sigma_3^2 + 2w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2w_1w_3\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 \\ &\quad + 2w_2w_3\rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^3 w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \end{aligned}$$

ただし、 $w_1 + w_2 + w_3 = 1$

ポートフォリオの収益率の分散（ n 銘柄のケース）

$$Var(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad \dots\dots ①$$

$$= \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^n w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad \dots\dots ②$$

上の 3 銘柄のケースでは②式を使っているが、計算結果はいずれを使っても同じである。

なお、ポートフォリオの収益率の分散（ n 銘柄のケース）を行列により表すと、以下のとおりとなる。

$$\text{各リスク資産への投資比率ベクトルを } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{リスク資産の分散共分散行列を } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

とすれば、ポートフォリオの分散 σ_p^2 は

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + \cdots + x_n^2 \sigma_n^2 \\ &\quad + 2 \begin{pmatrix} x_1 x_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 + \cdots + x_1 x_n \rho_{1n} \sigma_1 \sigma_n \\ + x_2 x_3 \rho_{23} \sigma_2 \sigma_3 + \cdots + x_2 x_n \rho_{2n} \sigma_2 \sigma_n \\ + \cdots \\ + x_{n-1} x_n \rho_{n-1,n} \sigma_{n-1} \sigma_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表すことができる。

(4) ポートフォリオの期待収益率（リターン）と収益率の標準偏差（リスク）の関係

－投資機会集合－

投資家が選択可能な投資対象全体を**投資機会集合**という。

(a) 2 銘柄のケース

2 銘柄からポートフォリオを構成するとき、縦軸にリターンをとり、横軸にリスクをとったグラフ上で、投資機会集合は相関係数の値によって、曲線または直線として描ける。

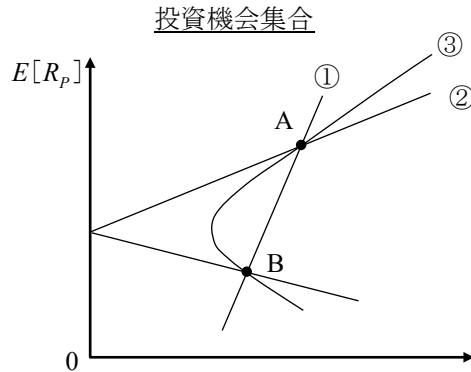
相関係数と投資機会集合（危険資産 2 銘柄のケース）

① 正の完全相関（相関係数 $\rho_{AB} = 1$ ）のケース：

2 銘柄 A, B を表す点を結んだ直線

② 負の完全相関（相関係数 $\rho_{AB} = -1$ ）のケース：

2 銘柄 A, B を表す点を通る折れ線
標準偏差を 0 にもできる。



1. 一般のケース ($-1 < \rho_{AB} < 1$) においては、投資機会集合は A, B を通る曲線で表される。…③
2. 正の完全相関（相関係数が $\rho_{AB} = 1$ ）のケースにおいては、ポートフォリオの期待収益率および収益率の標準偏差は

$$\text{期待収益率： } E(R_p) = w_A E(R_A) + w_B E(R_B)$$

$$\text{標準偏差： } \sigma_p^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B \quad (\because \rho_{AB} = 1)$$

$$\therefore \sigma_p = w_A \sigma_A + w_B \sigma_B$$

と表される。ここで、保有比率に関して

$$w_A + w_B = 1$$

であるので、以上 3 式から w_A 、 w_B を消去すれば、

$$\sigma_p = \frac{\sigma_A - \sigma_B}{E(R_A) - E(R_B)} (E(R_p) - E(R_B)) + \sigma_B$$

となり①のように 2 銘柄 A, B を表す点を結んだ直線となる。すなわち投資機会集合は 2 点 A, B を通る直線で表される。

3. 負の完全相関（相関係数が $\rho_{AB} = -1$ ）のケースにおいては、ポートフォリオの収益率の標準偏差は

$$\sigma_p = |w_A \sigma_A - w_B \sigma_B|$$

と表されるから、 w_A 、 w_B を消去すれば、

$$\sigma_p = \left| \frac{\sigma_A + \sigma_B}{E(R_A) - E(R_B)} (E(R_p) - E(R_B)) - \sigma_B \right|$$

となり、②のように2銘柄A, Bを通る折れ線となる。また、保有比率が、

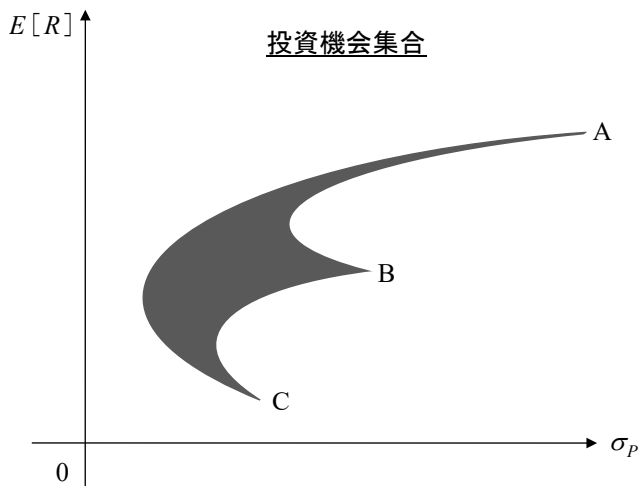
$$w_A = \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}$$

のとき、ポートフォリオの標準偏差は0になる。

4. 2銘柄を正に保有比率で持つ（つまりAB間で表される）とき、相関係数が小さくなればなるほど、同じ期待収益率を表す点は左側に位置することになる。これは相関係数が小さいほどポートフォリオのリスク分散効果が大きいことを示している。

(b) 一般のケース

3銘柄以上からなるケースの投資機会集合は、安全資産が存在せず、かつ、どの2銘柄間をとっても相関係数が1でも-1でもなければ、次の図のように曲線とその右側として表せる。



4 効率的フロンティア

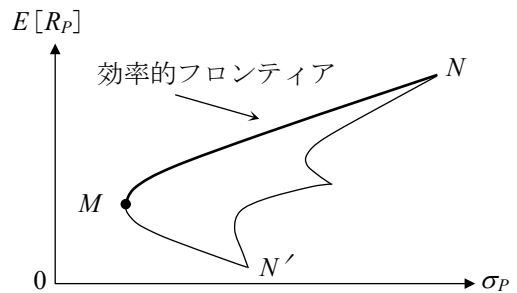
1. で述べたように、投資家のポートフォリオ選択は、「投資機会集合から効用を最大にする投資案を選択する」問題として定式化される。

しかし危険回避的な投資家を前提とすれば、投資機会集合全体を考える必要はなく、上の問題は「効率的フロンティアの中から、効用を最大にする投資案を選択する」問題に限定して考えることができる。

効率的フロンティア (efficient frontier) とは、危険回避的な投資家にとって選択対象となりうるポートフォリオの集合をいい、効率的フロンティア上のポートフォリオを**効率的ポートフォリオ (efficient portfolio)** という。

(1) 危険資産のみからなるケース

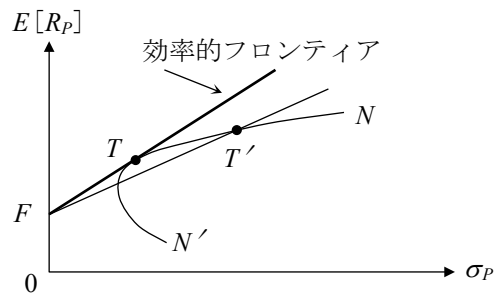
3 銘柄以上からなるケースの投資機会集合は、安全資産が存在せず、かつ、どの2 銘柄間をとっても相関係数が $-1 < \rho < 1$ であれば、右図のような曲線 NMN' とその右側として表せる。



ところで、危険回避的な投資家は、リターンが同じであればリスクの最も小さい投資案を望ましいと考えるから、曲線 NMN' の右側の部分は選択対象とはならず、最も左側の部分である曲線 NMN' (最小分散境界) のみに着目すればよい。また、リスクが同じであればリターンの最も大きい投資案を望ましいと考えるから、曲線のうち上半分 (傾きが正の部分) の NM のみが選択対象となりうることになる。したがって、危険資産のみからなるケースの効率的フロンティアは、最小分散ポートフォリオ M よりも右上に位置する NM ということになる。

(2) 安全資産を含むケース

安全資産と危険資産からなるポートフォリオの場合、投資機会集合は安全資産と危険資産を示す点を結ぶ直線として表せる。いま、安全資産 F が存在するときの効率的フロンティアは安全資産を表す点 F から曲線にひいた接線である直線 FT になる (このとき、 T を



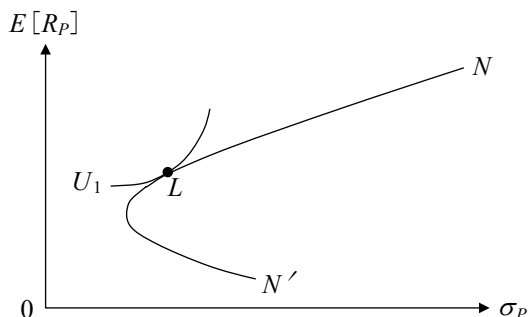
接点ポートフォリオという)。なぜなら、接点以外の点 (たとえば T') をとると、直線 FT' よりも左上に実行可能なポートフォリオが存在することになるため、危険回避的な投資家にとって直線 FT' は効率的フロンティアとはなりえないからである。

5 最適ポートフォリオ

投資家のポートフォリオ選択は、「効率的フロンティアの中から、効用を最大にする投資案を選択する」ものと定式化できた。この効率的フロンティアの中で効用を最大にする投資案（ポートフォリオ）を**最適ポートフォリオ**（optimal portfolio）という。

(1) 危険資産のみからなるケース

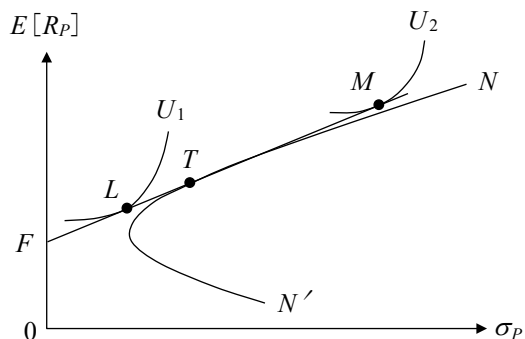
最適ポートフォリオは、効率的フロンティア上で投資家の無差別曲線と接する点で表される。したがって、無差別曲線が U_1 で表される投資家の場合は L が最適ポートフォリオとなる。



(2) 安全資産を含むケース

安全資産と危険資産からなるポートフォリオの場合、効率的フロンティアは安全資産と危険資産の表す点を結ぶ直線として表される。

したがって、無差別曲線が U_1 で表される投資家の場合は L 、 U_2 で表される投資家の場合は M が最適ポートフォリオとなる。



なお、 L では、安全資産 (F) と危険資産である接点ポートフォリオ (T) を正の比率で保有しているが、 M では、安全資産を負の比率で保有し（したがって、借入れを行い）接点ポートフォリオに投資することになる。そのため、 FT 上のポートフォリオを**貸付ポートフォリオ**、 TM 上のポートフォリオを**借入ポートフォリオ**と呼ぶこともある。

以上から、実は、投資家の選好がいかなるものであろうと安全資産 (F) と接点ポートフォリオ (T) が選択されることになる。つまり、リスク資産の最適な組合せ (T) の決定は、安全資産を含む最適ポートフォリオの決定の問題とは分離可能である。これを**分離定理**（separation theorem）という。