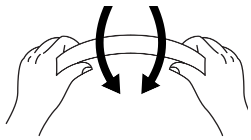
第2章　静定構造物の応力

第1節　応力

1．応力とは

第１章で学習したように、骨組に荷重が作用すると、荷重につり合うように反力が生じる。これらの**外力は**、梁や柱などの**部材を変形（伸ばす、縮める、ずらす、曲げるなど）させようとする。その変形に対応して部材内部に生じる力が応力**である。

この変形させようとする力、つまり応力は、右図のように、大きさ等しく、向きを反対とする『**つり合う１対の力**』である。部材の任意の断面には、この１対の力が生じている。



外力
荷重と反力を合わせて、外力である。

2．応力の種類

部材に生じる応力の種類は、次のとおり**軸方向力（軸応力）、せん断力（せん断応力）、曲げモーメント（曲げ応力）の３種類**である。

応力の種類	部材に作用する力	一部断面の変形	応力図（N図、Q図、M図）の描き方	
軸方向力（N）	N ← → N 引張 ⊕ N → ← N 圧縮 ⊖	伸ばす力、縮める力 N ⊕ N N ⊖ N	上側 ⊕ 下側 ⊖ 材軸に平行	静定ラーメンのN図、Q図 ⊕ ⊖ ⊕ ⊖ ⊖ ⊕ 骨組み外側（+） 骨組み内側（−）
せん断力（Q）	Q Q 右下り ⊕ Q Q 左下り ⊖	ずらす力 Q ⊕ Q Q ⊖ Q	集中荷重の場合 上側 ⊕ 下側 ⊖ 等分布荷重の場合 上側 ⊕ 傾斜直線　下側 ⊖	
曲げモーメント（M）	M M 下に凸（引張）⊕ M M 上に凸（引張）⊖	曲げる力 M ⊕ M M ⊖ M	凸側（引張側）に描く 集中荷重の場合 ⊕ 傾斜直線 等分布荷重の場合 ⊕ 放物線（2次曲線） モーメント荷重の場合 M ⊖ ⊕ M 傾斜直線	

①　軸方向力（軸応力）記号：*N*

力が部材軸方向に作用する場合、**伸びたり縮んだりする変形をおこそうとする力**を軸方向力といい記号 N で表す。軸方向力には、引張力（引張応力）と圧縮力（圧縮応力）があり、引張力を（+）、圧縮力を（−）で表す。

②　せん断力（せん断応力）記号：*Q*

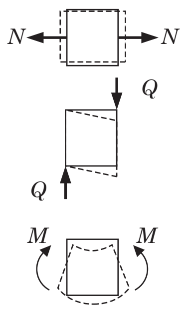
力が部材軸に直角方向に作用する場合、部材軸に直角方向に**ずれる変形をおこそうとする力**をせん断力といい記号 Q で表す。せん断力は、右下りのせん断力を（+）、左下りのせん断力を（−）で表す。

③　曲げモーメント（曲げ応力）記号：*M*

力による回転力が作用する場合、部材に**湾曲する変形をおこそうとする力**を曲げモーメントといい記号 M で表す。曲げモーメントは、上側が湾曲する場合を（+）、下側が湾曲する場合を（−）で表す。

第２節　静定ばりの応力計算

1．応力計算の考え方



３種類の応力の**大きさ**と**向き**を求めることが応力計算である。
応力の求め方は、まず最初に**反力を求め**、構造物に作用するすべての**外力を明らかにすることから始まる**。

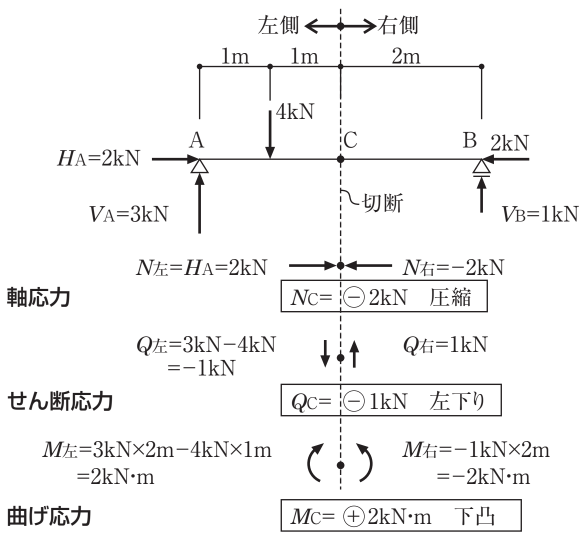
外力がつり合う構造物の部材の応力は、『**つり合う一対の力**』である。つまり、任意の点の両側それぞれの力の総和は、大きさ等しく、向きが反対の力となる。したがって、**応力を求める点を切断し、どちらか片側について、Σ X、Σ Y、Σ M を求めれば、軸方向力、せん断力、曲げモーメント**の大きさと向きがわかる

例えば、右の鉛直荷重 4 kN と水平荷重 2 kN が作用する単純梁について、反力は、図のように求められ、外力はつり合っている。

C 点で切断し、右側、左側それぞれについて、X 方向の力、Y 方向の力、モーメントの総和を求めると、C 点に生じる力は、図のように、左右どちらから求めても同じ値で、向きが反対であることがわかる。

このように、応力の大きさは、**求める点のどちらか片側について計算し求めることができる**。

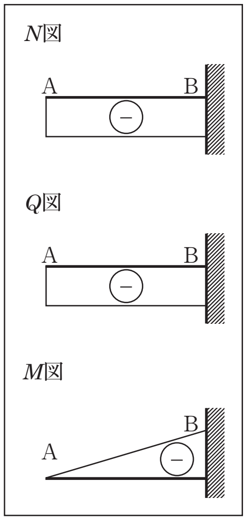
また、C 点の応力は、一対の力なので、$N_{C左}$、又は $N_{C右}$といった区別は必要なく、N_C、Q_C、M_C、と表現する。



2. 片持ち梁の応力計算

片持ち梁の応力計算は、支点が固定端１つだけなので、自由端側の外力があきらかである。したがって、反力を求めなくても、応力を自由端から求めることができる。

片持ち梁の応力は、反力計算を省略し、自由端から直接求める



1 応力計算の手順Ⅰ（集中荷重が作用する場合）

① **応力を求める点で切断する**

C点で切断し、C点の応力を求める

② **片側（自由端側）の力の総和を求める**

⑴ **軸方向力**（N）

N_C = 1 kN（圧縮力⊖）

⑵ **せん断力**（Q）

Q_C = 2 kN（↓↑）

↓↑は、⊖のせん断力

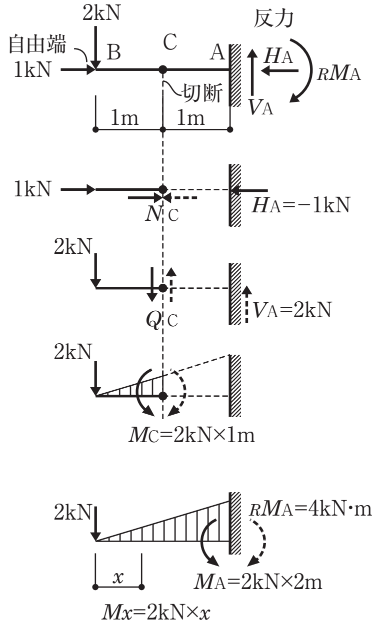
⑶ **曲げモーメント**（M）

$M_C = -2\,\text{kN} \times 1\,\text{m} = -2\,\text{kN·m}$

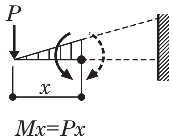
は　上側凸

なお、A点の曲げモーメントも自由端から計算して、

$M_A = -2\,\text{kN} \times 2\,\text{m} = -4\,\text{kN·m}$



したがって、荷重 P が作用する片持ち梁の自由端からの距離 x の点の曲げモーメントは Px となり、**荷重点からの垂直距離（スパンの長さ）に比例して大きくなる。**



2 応力計算の手順Ⅱ（等分布荷重が作用する場合）

集中荷重と同様に自由端から計算すればよいのだが、**求める位置によって自由端側の荷重が変わる**ことに注意しなければならない。

① **応力を求める点で切断する**

自由端から距離 x のC点で切断し応力を求める

② **片側（自由端側）の力の総和を求める**

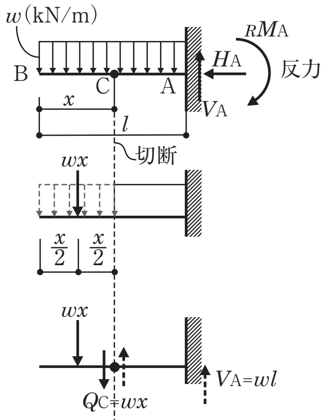
C点より**自由端側の等分布荷重を集中荷重に**置き換える

⑴ 材軸方向に外力はなく、**軸方向力**は0

⑵ **せん断力**

$Q_C = wx$（↓↑）⊖のせん断力

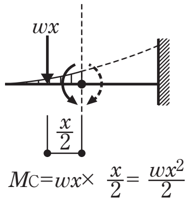
なお、$Q_A = wl$（↓↑）⊖のせん断力



⑶　**曲げモーメント**

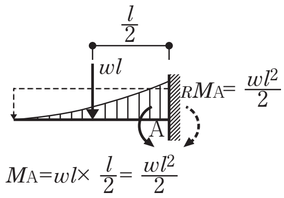
C 点の自由端側の荷重 wx と C 点からの垂直距離 $\frac{x}{2}$ との積となる。

$$M_C = wx \times \frac{x}{2} = \frac{wx^2}{2}$$ は上凸



A 点も同様に求めてみると、

$$M_A = wl \times \frac{l}{2} = \frac{wl^2}{2}$$ は上凸



3．単純ばりの応力計算

単純ばりの応力計算は、最初に反力を求めてから応力を求める。

反力を求める ──► **求める点で切断** ──► **片側から応力を求める**

1 応力計算の手順Ⅰ（集中荷重が作用する場合）

①　**反力を仮定し、求める**

$\Sigma M_A = 6\,\mathrm{kN} \times 1\,\mathrm{m} - V_B \times 3\,\mathrm{m} = 0$

$6\,\mathrm{kN{\cdot}m} - 3\,\mathrm{m} \times V_B = 0$　　$\therefore$　$V_B = 6\,\mathrm{kN{\cdot}m}/3\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{kN}$（上向き）

$\Sigma Y = V_A + V_B - 6\,\mathrm{kN} = V_A + 2\,\mathrm{kN} - 6\,\mathrm{kN} = 0$　$\therefore$　$V_A = 4\,\mathrm{kN}$（上向き）

②　**応力を求める**

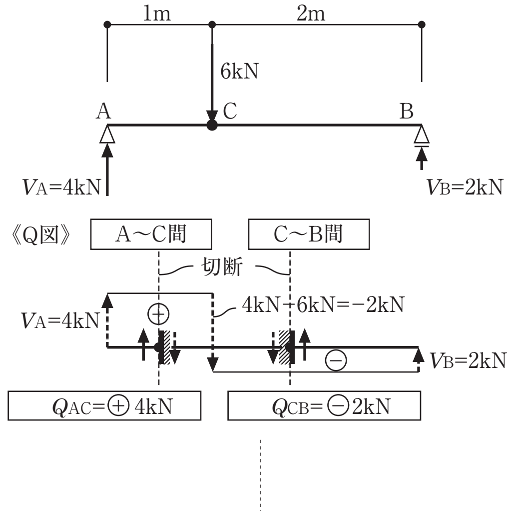
求める点で切断し、どちらか片側で力の総和を求める。これは**片側を片持ち梁として、計算するのと同じ**ことになる。

応力の変化は、荷重点間においては一定又は一様となるので、区間ごとに求める。

⑴　材軸方向に外力がないので、AB 間に**軸方向力**（N）は生じない。

⑵　**せん断力**（Q）

わかりやすくするために、せん断力図（Q 図）に、外力を示した図で説明する。



A ～ C 間の任意の点で切断し、左側で計算する。左側は、$V_A = 4\,\mathrm{kN}$ のみである。

$Q_{AC} = 4\,\mathrm{kN}$（↑ ↓）右下り⊕

C ～ B 間の任意の点の右側は、$V_B = 2\,\mathrm{kN}$ のみである。

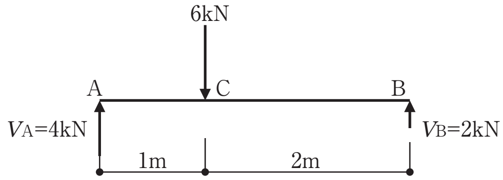
$Q_{CB} = 2\,\mathrm{kN}$（↓ ↑）左下り⊖

（なお、左側でも $4\,\mathrm{kN} - 6\,\mathrm{kN} = -2\,\mathrm{kN}$ となり、両側で大きさ等しく向きが反対であることがわかる）

また、**Q 図は、左側から順に外力を落とし込んでいく**ことで、簡単に描くことができる。

(3)　曲げモーメント（M）

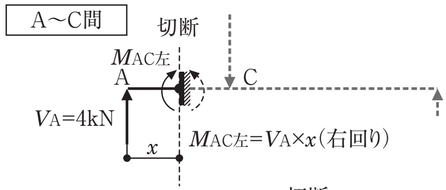
・**A～C間**について、A 点からの距離 x の任意の点で切断し、左側のモーメントを求める。



$M_{AC} = V_A \times x = 4\,\mathrm{kN} \times x$

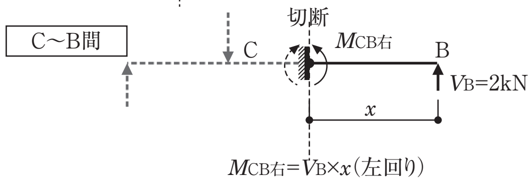
A 点から　距離が離れるほど曲げモーメントは大きくなり、C 点で最大となる。

・**C～B 間**について、B 点からの距離 x の任意の点で切断し、右側のモーメントを求める。



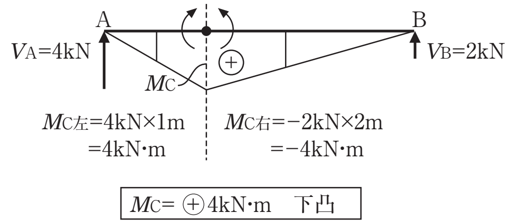
$M_{CB} = V_B \times x = -\ 2\mathrm{kN} \times x$（下凸）

B 点から距離が離れるほど曲げモーメントは大きくなり、C 点で最大となる。



左側でも $M_{CB} = V_A \times (3\,\mathrm{m} - x) - 6\,\mathrm{kN} \times 2\,\mathrm{m}$ $= 4\,\mathrm{kN} \times (3\,\mathrm{m} - x) - 6\,\mathrm{kN} \times (2\,\mathrm{m} - x)$ $= 12\mathrm{kN{\cdot}m} - 4\,\mathrm{kN} \times x - 12\mathrm{kN{\cdot}m} + 6\,\mathrm{kN} \times x$ $= 2\mathrm{kN} \times x$（下凸） 左右で、大きさ等しく、向きは反対となる。

《M図》

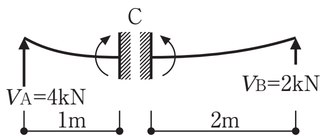


・***A* 点、*B* 点、*C* 点、各荷重点の曲げモーメント**を求め、曲げモーメント図を描く。

***A*、*B* 支点**は、回転力には抵抗できないので、曲げモーメントも０になる。$M_A = M_B = 0$

C 点　切断し左側で計算する。これは C 点を固定端とした片持ち梁の計算とも考えられる。

$M_C = 4\,\mathrm{kN} \times 1\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{kN{\cdot}m}$（下凸）

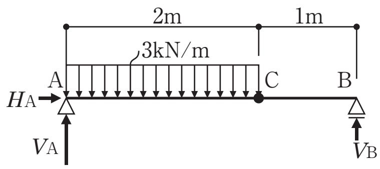


荷重点間（外力と外力の間の区間）において、応力は一定又は一様に変化するので、各点を直線で結びモーメント図を描く。

2 応力計算の手順Ⅱ（等分布荷重が作用する場合）

①　反力を仮定して、反力を求める

等分布荷重を集中荷重に置き換える。

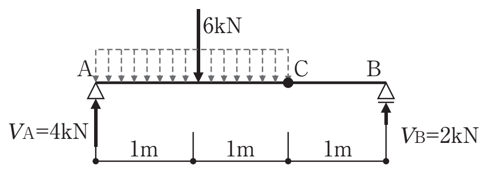


$\Sigma\ X = 0$　　$\therefore\ H_A = 0$　水平反力は生じない。

$\Sigma\ M_A = 0$ より、

$6\,\mathrm{kN} \times 1\,\mathrm{m} - V_B \times 3\,\mathrm{m} = 0$

$6\,\mathrm{kN{\cdot}m} - 3\,\mathrm{m} \times V_B = 0$　　$\therefore\ V_B = 2\,\mathrm{kN}$（上向き）



$\Sigma\ Y = 0$ より、

$V_A + V_B - 6\,\mathrm{kN} = 0$

$V_A + 2\,\mathrm{kN} - 6\,\mathrm{kN} = 0$　　$\therefore\ V_A = 4\,\mathrm{kN}$（上向き）

②　応力を求める

求める点で**切断して**、どちらか片側で計算する。**片側を片持ち梁として計算**することと同じである。

AC 間と CB 間の区間ごとに考えてみる。

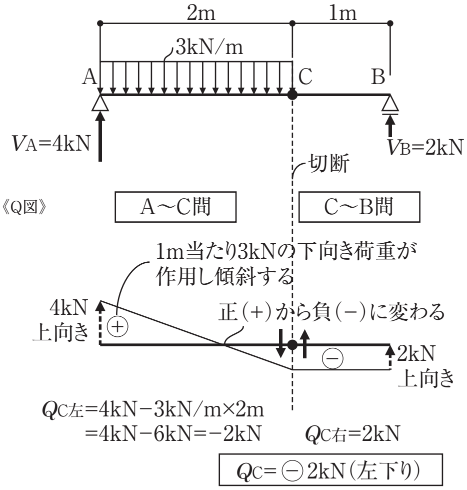
⑴　**軸方向力**（N）

材軸方向には外力がないので、$N = 0$

⑵　**せん断力**（Q）

せん断力図（Q 図）に荷重状態を示した図で説明する。

等分布荷重が作用する場合は、単位長さごとにせん断力が変化するので、まず、端部 A 点から求める。



・**A点**　反力 V_A が作用している。

$Q_A = 4\,\text{kN}$（↑↓）右下り⊕

・**AC 間**

A 点から離れるにしたがって、等分布荷重（3 kN/m）の下向き荷重が作用するので、図のような**傾斜直線**となる。

あるところで、正（+）から、負（−）に変わる。

・**C 点**　切断し、右側で計算する。C 点右側には、V_B のみ作用している。

$Q_C = 2\,\text{kN}$（↓↑）左下り⊖

（なお、左側で計算しても、図のように大きさ等しく、向きが反対の結果が得られる。）

・**CB 間**　右側には、反力 V_B のみ作用している

$Q_{CB} = 2\,\text{kN}$（↓↑）左下り⊖で、一定

各点を直線で結んで、せん断力図（Q 図）を描く。荷重の大きさ方向を左から順に落とし込んでいくことで、簡単に描くことができる。

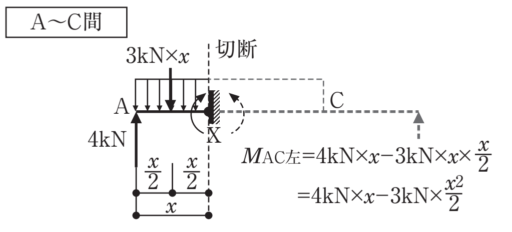
⑶　**曲げモーメント**（M）

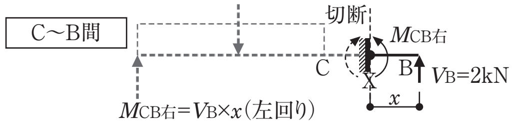
・**A点、B点**　回転できる支点なのでモーメントは 0

$M_A = M_B = 0$

・**AC 間**　A 点から距離 x の点で切断し、左側の外力によるモーメントの総和が曲げモーメントとなる。

左側の等分布荷重を集中荷重に置き換えると 3kN × x となり、





$$M_{AC} = 4\text{kN}\times x-(3\text{kN}\times x)\times\frac{x}{2}$$

$$= 4x-\frac{3x^2}{2}\text{kN}\cdot\text{m}$$

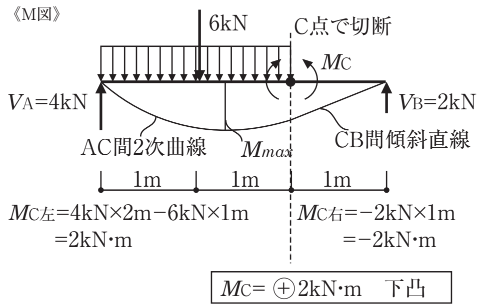
つまり、AC 間の M 図は、２次曲線になる。

・**CB 間**　B 点からの距離 x の任意の点で切断し、右側のモーメントを求める。

$M_{CB} = V_B \times x = -\ 2\text{kN} \times x = -\ 2x\text{kN}\cdot\text{m}$（下凸）

曲げモーメント図（M 図）の荷重状態を示した図で説明する。

B 点から　距離が離れるほど、傾斜直線で、曲げモーメントは大きくなり、C 点で最大となる。なお、左側でモーメントの総和を求めても、図のように、大きさ等しく、向きが反対の結果が求められる。



・**C 点**　切断し、右側で計算する

M_C = − 2 kN × 1 m = 2 kN·m（↻）は、下凸

③　**せん断力と曲げモーメントの関係**

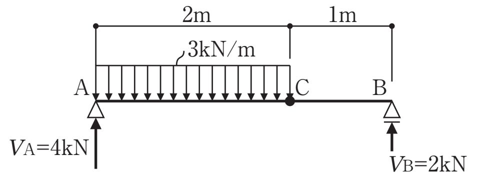
せん断力図（Q 図）と曲げモーメント図（M 図）に作用する外力を示した図で解説する。

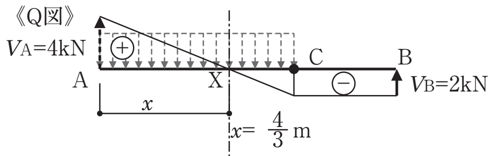
⑴　**せん断力の正（＋）・負（－）が変わる点（せん断力が０となる点）で、曲げモーメントは最大**となる

曲げモーメントの大きさは、各点の**片側のせん断力図**（Q 図）**の面積の総和**である。

例えば、C 点の曲げモーメントは、Q 図右側の CB 間の四角形の面積となり、左側の AX 間の (+) の直角三角形の面積と XC 間の（−）の直角三角形の面積の差である（当然いずれも、絶対値は同じ）。

つまり、せん断力が正又は負どちらか一定の範囲では、距離に応じて、曲げモーメントは増加し、**正・負が変わる点を過ぎると、減少していく**ことになる。



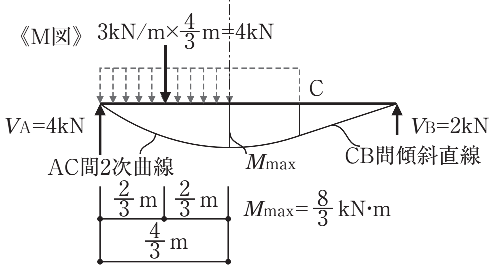


⑵　**『曲げモーメントが最大となる位置』及び『最大曲げモーメント』を求める**

右の図で、せん断力が０になる点 X の位置を求める。X 点で切断し、左側でせん断力を計算すると、

$Q_{X左}$ = 4 kN − 3 kN/m × x = 0

$\therefore x = \frac{4}{3}$m



したがって、最大曲げモーメント M_{max} が生じるのは、A 点から $\frac{4}{3}$m の位置である。その X 点で切断し、左側で曲げモーメントを計算する。

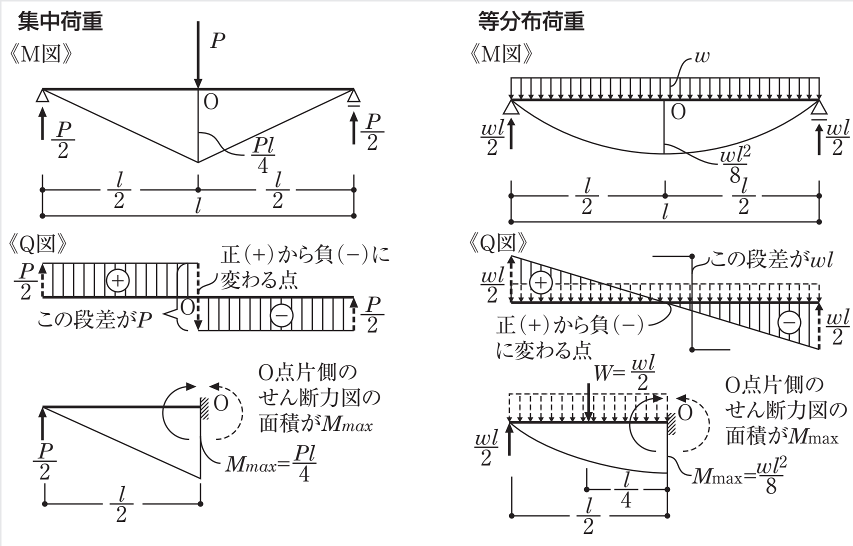
等分布荷重を集中荷重に置き換えると、3kN/m×$\frac{4}{3}$m＝4kNなので、

$$M_{maxx左} = 4\text{kN}\times\frac{4}{3}\text{m}(右回り) - 4\text{kN}\times\frac{2}{3}\text{m}(左回り) = \frac{8}{3}\text{kN}\cdot\text{m}$$

試験においては、特に、**最大曲げモーメントが生じる位置をせん断力図から求められるようにしておく**必要がある。

Check Point　試験に役立つ基本知識

❶せん断力の正負が変わる（０になる）位置で、曲げモーメントは最大になる。

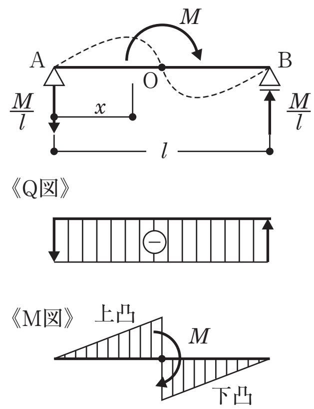


❷せん断力の面積の総和（積分したもの）が曲げモーメントであることから、

- せん断力が一定　⇒　曲げモーメントは傾斜直線（せん断力が傾斜勾配）
- せん断力が傾斜直線　⇒　曲げモーメントは２次曲線
- せん断力が０　⇒　曲げモーメントは生じない（又は一定）

3 応力計算の手順Ⅲ（モーメント荷重が作用する場合）

①　反力を仮定して、反力を求める



第１章で学習したように、反力計算においては、モーメント荷重の作用点にかかわらず、反力の偶力によりつり合うので、両端の反力の大きさは、$\dfrac{M}{l}$で、図のように向きを反対にする一対の反力となる。

②　応力を求める

求める点で**切断して**、どちらか片側で計算する。

⑴　せん断力

どこで、切断しても材軸に垂直方向の力は、反力のみなので、図のような一定のせん断力図となる。

⑵　曲げモーメント

曲げモーメントを計算するときは、反力計算と違い、モーメント荷重の作用点が影響する。荷重点で、モーメント荷重の分の段差が生じる。

AO 間　切断し、左側で計算すると、反力$\dfrac{M}{l}$により、

$M_{AO} = \dfrac{M}{l} \times x$となり、O 点で、最大$\dfrac{M}{2}$（上凸）となる。

OB 間　切断し、右側で計算すると、AO 間と同じく、O 点で、最大$\dfrac{M}{2}$（下凸）となる。

このように、モーメント荷重の作用点で、モーメント荷重 M の段差が生じることがわかる。

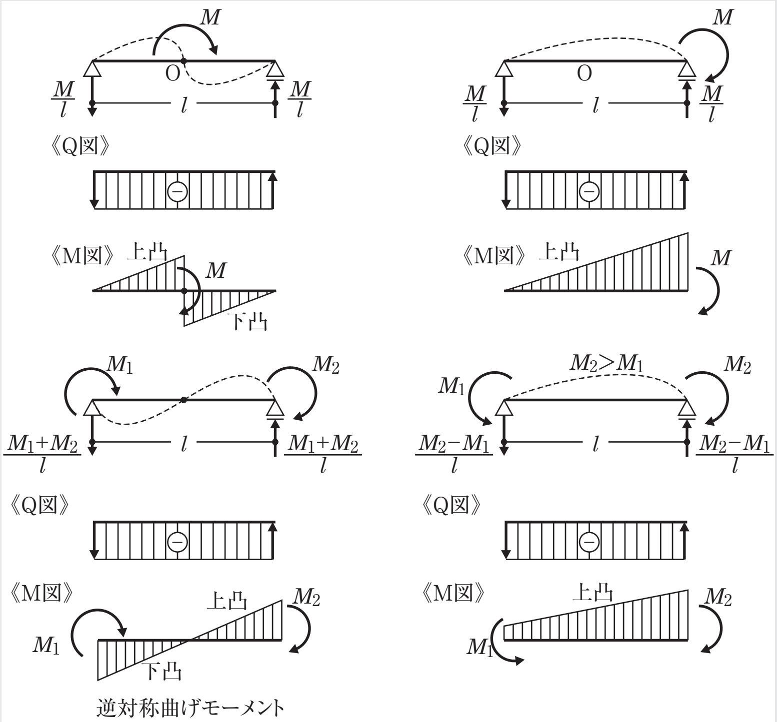
Check Point　モーメント荷重のみが作用する場合の特徴

❶反力は、モーメント荷重の総和の偶力となる。

❷軸方向力は作用しない。

❸せん断力は、反力のみなので、一定となる。

❹モーメント荷重点で、曲げモーメントの段差が生じる。



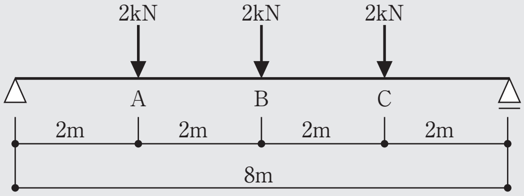
逆対称曲げモーメント

部材の両端に逆対称の曲げモーメントが作用する場合をいう。

地震時の部材に生じる曲げモーメントで、曲げモーメントからせん断力、せん断力から曲げモーメントを求めるときに必要な公式として覚えておく。

Check Point ケーススタディ

❶単純ばりにおいて、B 点の曲げモーメントの大きさと、A ～ B 間のせん断力の大きさを求めよ。



〔解答〕

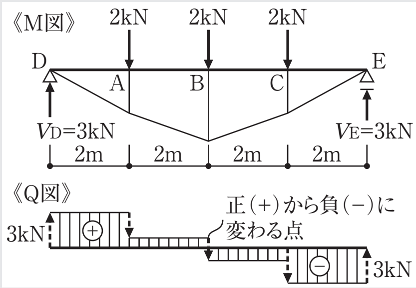
荷重が対称に作用しているので、反力 $V_D = V_E = \dfrac{6\text{kN}}{2} = 3\text{kN}$

B 点のモーメント M_B は、左側で計算すると

$M_B = V_D \times 4\text{m} - 2\text{kN} \times 2\text{m}$

$= 3\text{kN} \times 4\text{m} - 4\text{kN·m}$

$= 8\text{kN·m}$

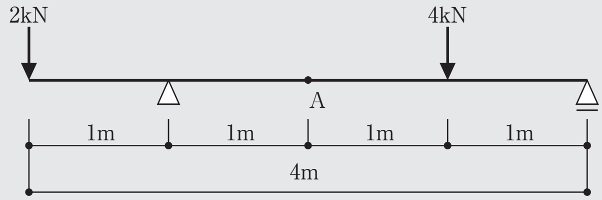


AB 間のせん断力 Q_{AB} は、左側で

$Q_{AB} = V_D - 2\text{kN} = 3\text{kN} - 2\text{kN} = 1\text{kN}$

（答　B点の曲げモーメント＝8 kN·m　A～B間のせん断力＝1 kN（右下がり））

❷単純梁の A 点の曲げモーメントの値求めよ。



〔解答〕

$\Sigma M_B = 0$ より、

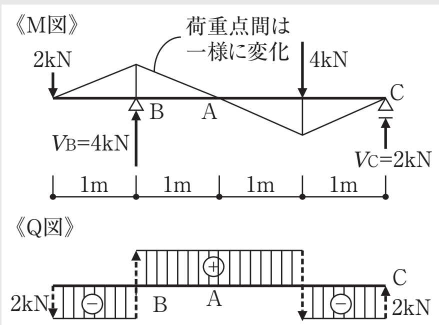
$-2\text{kN} \times 1\text{m} + 4\text{kN} \times 2\text{m} - V_C \times 3\text{m} = 0$

$\therefore V_C = 2\text{kN}$（仮定の向き）

$\Sigma Y = 0$ より

$-2\text{kN} + V_B - 4\text{kN} + V_C = 0$

$\therefore V_B = 4\text{kN}$（仮定の向き）



A 点のモーメントは、左側で計算すると

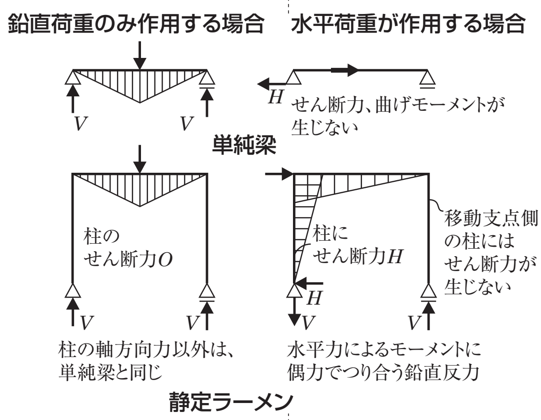
$M_A = -2\text{kN} \times 2\text{m} + V_B \times 1\text{m} = 0$

（答　A 点の曲げモーメント＝0）

第３節　静定ラーメンの応力計算

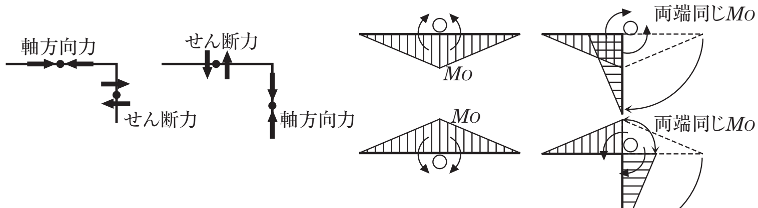
1. 静定ラーメンの応力

静定ラーメンは、部材数が２つ以上になるが、応力計算の要領は、単純ばりと同様である。ただし、図のように、鉛直荷重のみ作用する場合は、単純梁と同じであるが、水平荷重が作用する場合は、回転支点側の柱にせん断力が作用し、また水平荷重によるモーメントにより鉛直反力も作用することから、各部材に生じる応力も異なるので注意する。



また、柱と梁の接合部が剛節点であることは、直線部材でなくとも、図のように、その両端で、大きさ等しく、向きが反対の『つり合う一対の力』が生じることに変わりないことを確認しておこう。

ただし、材軸が、縦と横の部材があるので、応力の種類が部材によって変化する。つまり、**梁の軸方向力と柱のせん断力、梁のせん断力と柱の軸方向力が、剛節点の両側でつり合っている**。**曲げモーメントは**、直線部材と同様に**両端で大きさ等しく、向きが反対でつり合う**。



剛節点の応力伝達

2. 片持梁系ラーメン

片持ち梁系ラーメンの応力計算は、片持ち梁と同様に、自由端側の外力が明らかである。したがって、反力を求めなくても、応力を自由端から求めることができる。

片持ち梁系ラーメンの応力計算⇒自由端から直接求める

自由端に２kN の水平荷重が作用する片持ち梁系ラーメンの応力を求める。

① **応力を求める。**

(1) **軸方向力 (*N*)**

各区間ごとに切断し、自由端側で計算する。

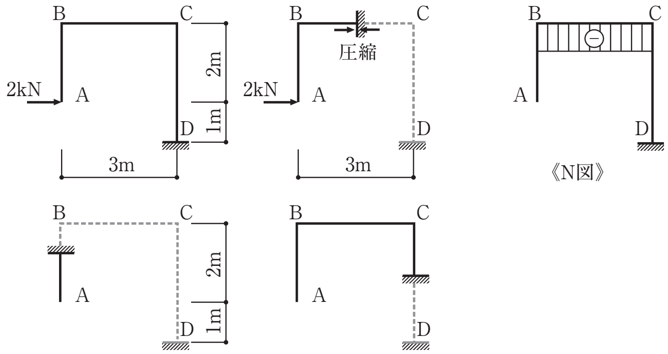
A～B 間　鉛直力はない

$N_{AB} = 0$

B～C 間　２kN のみ作用する

$N_{BC} = 2\,\mathrm{kN}$（圧縮力）⊖

C～D 間



自由端側に鉛直力はない

$N_{CD} = 0$

したがって、軸方向力は、梁のみに生じ、図のようなＮ図となる。

⑵　せん断力（Q）

各区間ごとに切断し、自由端側で計算する。

Ａ～Ｂ間

自由端側には２kN が作用してる

$Q_{AB} = 2\,\text{kN}$ ⇆左下り⊖

Ｂ～Ｃ間

自由端側に鉛直力はない

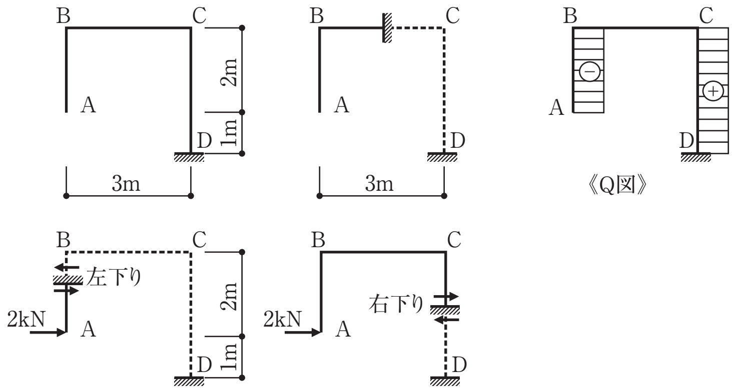
$Q_{BC} = 0$

Ｃ～Ｄ間

自由端側には２kN が作用してる

$Q_{CD} = 2\,\text{kN}$ ⇄右下り⊕

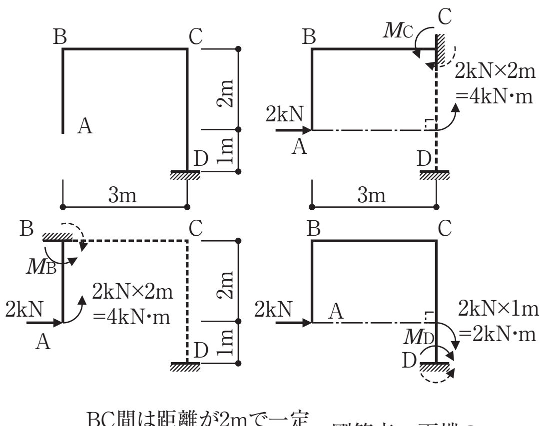
したがって、両柱にせん断力が生じ、図のようなＱ図となる。



《Q図》

⑶　曲げモーメント（M）

荷重点間では、曲げモーメントは一定又は一様に変化することから、各節点ごとに曲げモーメントを求め、その点を結べば、モーメント図を求めることができる。



Ａ点

$M_A = 0$

Ｂ点

切断し、自由端側で計算する

$M_B = -2\,\text{kN} \times 2\,\text{m} = -4\,\text{kN·m}$

Ｃ点

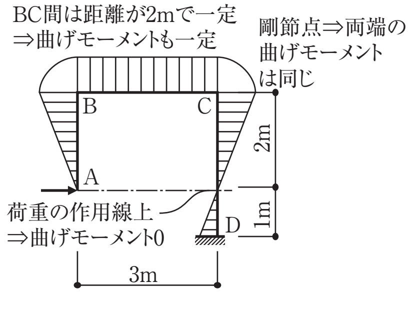
$M_C = -2\,\text{kN} \times 2\,\text{m} = -4\,\text{kN·m}$

Ｄ点

$M_D = 2\,\text{kN} \times 1\,\text{m} = 2\,\text{kN·m}$

Ａ点、Ｂ点、Ｃ点、Ｄ点、各点の凸側（引張側）の点を結べば、図のような曲げモーメント図が出来上がる。

ここで、CD 間では、水平力２kN の作用線がとおる位置で、**曲げモーメントが０の反曲点**（正負が変わる位置）が生じていることがわかる。



3．単純梁系ラーメン

単純梁系ラーメンは、単純梁と同様に反力を求めてから応力を求める。

反力を求める ⟶ **求める点で切断** ⟶ **片側から応力を求める**

水平力は、柱ではせん断力として、梁では軸方向力として作用するので、応力の計算時には十分注意する必要がある。

① **反力を仮定して、反力を求める。**

$\Sigma X = 0$ より、H_A を求める。

$4\,\mathrm{kN} - H_A = 0$　$\therefore H_A = 4\,\mathrm{kN}$（仮定の向き）

$\Sigma M_A = 0$ より、V_B を求める。

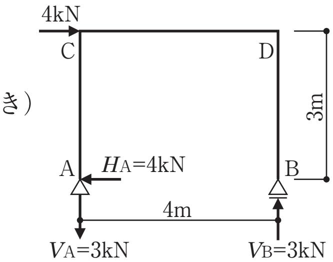
$4\,\mathrm{kN} \times 3\,\mathrm{m} - V_B \times 4\,\mathrm{m} = 0$

$12\mathrm{kNm} - 4\,\mathrm{m} \times V_B = 0$　$\therefore V_B = 3\,\mathrm{kN}$

$\Sigma Y = 0$ より、V_A を求める。

$-V_A + V_B = 0$

$-V_A + 3\,\mathrm{kN} = 0$　$\therefore V_A = 3\,\mathrm{kN}$（仮定の向きどおり下向き）



水平力４kNによるモーメントに対して、垂直反力の偶力でつり合っている。したがって、V_A、V_B は、大きさ等しく向きが反対となる。

② **応力を求める**

求める点で、切断し片側で計算すれば、応力を求めることができる。ただし、水平力の作用する静定ラーメンは、単純梁に比べ、計算がやや多くなってしまうため、**切断部のどちら側で計算した方が効率的であるかの判断が重要**である。次の解説では、あえて、左側で計算してみることにする。

⑴ **軸方向力（*N*）**

各区間ごとに切断し、A点側から計算する。

A～C間

下向き V_A が作用する。

$N_{AC} = 3\,\mathrm{kN}$（引張力）⊕

C～D間

水平力４kNと反力 H_A が作用する。

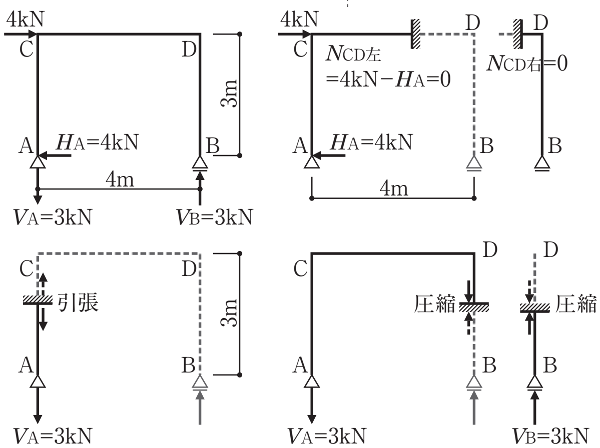
$N_{CD} = 4\,\mathrm{kN} - 4\,\mathrm{kN} = 0$

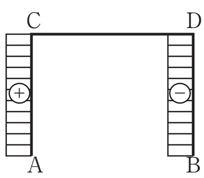
（なお、右側で計算すれば、水平力は作用していないので、明らかに０であることがわかる。）

D～B間　下向き V_A が作用する。

$N_{DB} = 3\,\mathrm{kN}$（圧縮力）⊖

（右側で計算すれば、鉛直力は V_B、結果は同じ。）





《N図》

⑵　せん断力（Q）

A～C 間

反力 H_A が作用する。

Q_{AC} ＝ 4 kN（⇄）⊕

C～D 間

反力 H_A が作用する。

Q_{CD} ＝ 3 kN（⇂↾）⊖

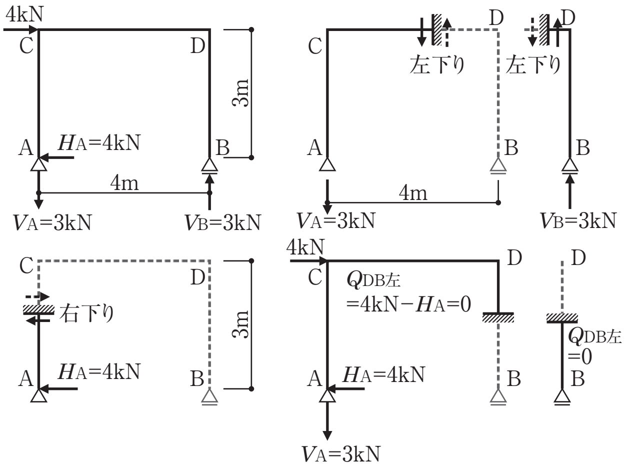
D～B 間

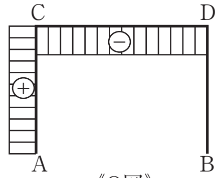
水平力 4 kN と反力 H_A が作用する。

Q_{DB} ＝ 4 kN － H_A ＝ 0

なお、DB 区間の右側で計算すれば、せん断力がないことから、明らかに Q_{DB} ＝ 0 であることがわかる。

また、せん断力は、AC 間と CD 間に生じ、せん断力図は右図のようになる。

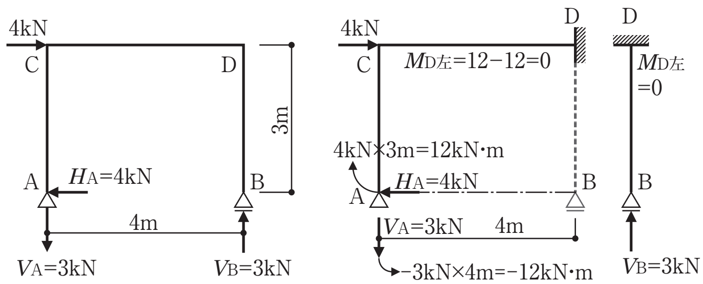


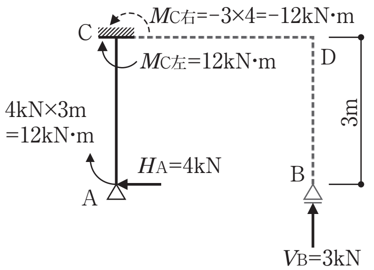


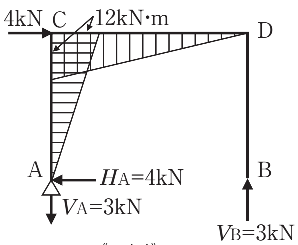
《Q図》

⑶　曲げモーメント（M）

荷重点間では、曲げモーメントは一定又は一様に変化することから、各節点ごとに曲げモーメントを求め、その点を結べば、モーメント図を求めることができる。







《M図》

A 点及び B 点

回転する支点なので、

M_A ＝ M_B ＝ 0

C 点

切断し、A 点側で計算する

M_C ＝ 4 kN × 3 m

＝ 12kN・m

（内側凸）

D点

切断し、左側（A 点側）で計算する。反力 H_A と反力 V_A によるモーメントの総和である。

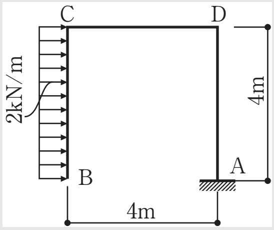
M_D ＝ H_A × 3 m － V_A × 4 m ＝ 4 kN × 3 m － 3 kN × 4 m ＝ 0

これは、右側（B 点側）で計算すれば、移動支点には水平反力が作用しないことから、右側柱には、せん断力も、曲げモーメントも生じない。

したがって、静定ラーメンの応力を計算するときは、**右側、左側のどちらが簡単に計算できるかを判断することが大切**である。

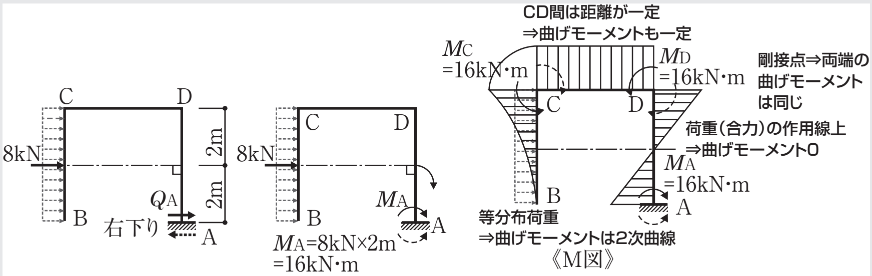
Check Point ケーススタディ

❶片持梁系ラーメンにおいて、A 点に生じるせん断力 Q_A と曲げモーメント M_A の値を求めよ。



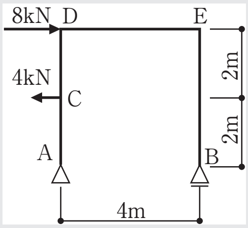
〔ヒント〕

片持梁系ラーメンの応力は自由端側から求める。なお、A、B、C、D 各点の曲げモーメントを求め、各点を結べば、M 図が描ける。



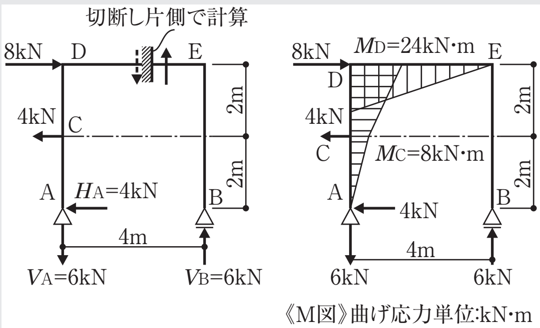
（答　Q_A = 8 kN　M_A = 16kN·m）

❷静定ラーメンにおいて、梁 DE に生じるせん断力 Q_{DE} と D 点の曲げモーメント M_D の値を求めよ。



〔ヒント〕

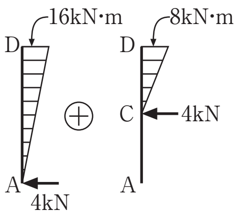
反力を求め、応力を求める点で切断し、片側からせん断力又は曲げモーメントを計算する。



（答　Q_{DE} = − 6 kN（左下がり））、M_D = 24kN·m

重ね合せの原理（応力の組合せ）

AD 柱の曲げモーメントは、H_A によるモーメントと C 点の水平荷重によるモーメントの重ね合せと考えることができる。



第４節　静定３ヒンジラーメンの応力計算

1. 静定3ヒンジラーメンの応力

静定ラーメンと同様に、反力を求めてから応力を求める。

反力を求める ──► **求める点で切断** ──► **片側から応力を求める**

３ヒンジラーメンのピン節点は、軸方向力とせん断力を伝達することはできるが、曲げモーメントは伝達できないので、曲げモーメントはゼロになる。つまり両側のそれぞれのモーメントの総和は必ず０となることに注目する。

なお、反力計算で示した、力のつり合い条件は、次の４式であることを確認しておこう。

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma X = 0\\ \Sigma Y = 0\\ \Sigma M = 0\end{array}\right\}$$ 力のつりあい条件式

ピン節点の $Mo = 0$　→　ピン節点の曲げモーメントは０。

〔３ヒンジラーメンの応力計算手順〕

図の３ヒンジラーメンで、応力計算手順を説明する

① **反力を求める**

$\Sigma M_A = 0$ より、V_B を求める。

$8\,kN \times 1\,m - V_B \times 4\,m = 0$

$8\,kN \cdot m - 4\,m \times V_B = 0$

$\therefore V_B = 2\,kN$（上向き）

$\Sigma Y = 0$ より、V_A を求める。

$V_A + V_B - 8\,kN = 0$

$V_A + 2\,kN - 8\,kN = 0$

$\therefore V_A = 6\,kN$（上向き）

$M_D = 0$ より、H_B を求める。

$M_{D右} = H_B \times 4\,m - V_B \times 2\,m = 0$

$H_B \times 4\,m - 2\,kN \times 2\,m = 0$

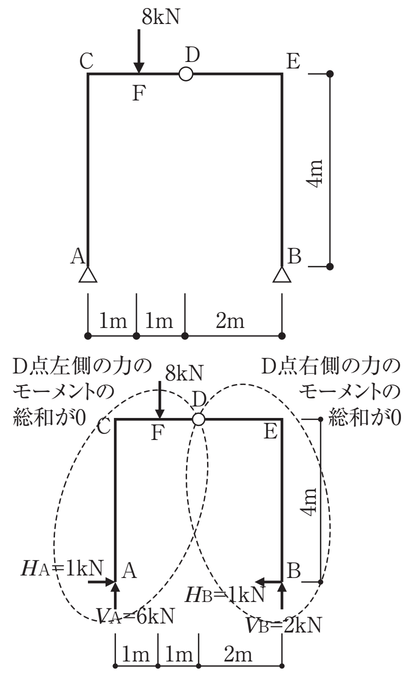
$\therefore H_B = 1\,kN$（仮定どおり左向き）

$\Sigma X = 0$ より、H_A を求める。

$H_A - H_B = 0$

$H_A - 1\,kN = 0$

$\therefore H_A = 1\,kN$（仮定どおり右向き）



②　応力を求める

⑴　軸方向力（N）

区間ごとに切断し片側で計算する。

AC 間

N_{AC} ＝ V_A ＝ 6 kN（圧縮力⊖）

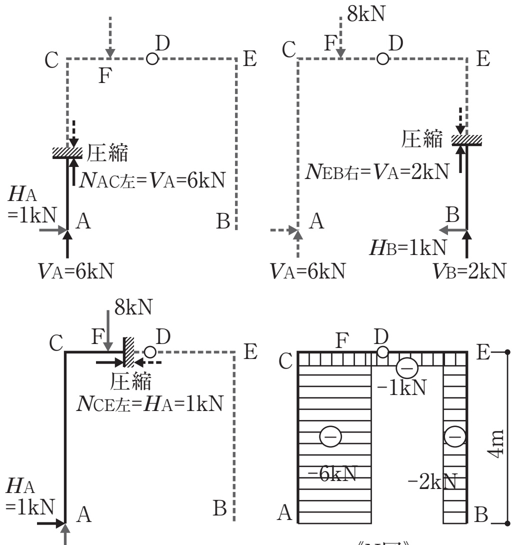
CE 間

N_{CE} ＝ H_A ＝ 1 kN（圧縮力⊖）

CF 間、FD 間、DE 間については、軸方向力は、H_A のみ作用するので軸応力は同じ。

EB 間

N_{EB} ＝ 2 kN（圧縮力⊖）



《N図》

⑵　せん断力（Q）

区間ごとに切断し片側で計算する。

AC 間

Q_{AC} ＝ H_A ＝ 1 kN（⇆⊖）

CF 間

Q_{CF} ＝ V_A ＝ 6 kN（⇅⊕）

FD 間、DE 間

両区間は、左側の鉛直力は、V_A と 8kN が作用しているので、

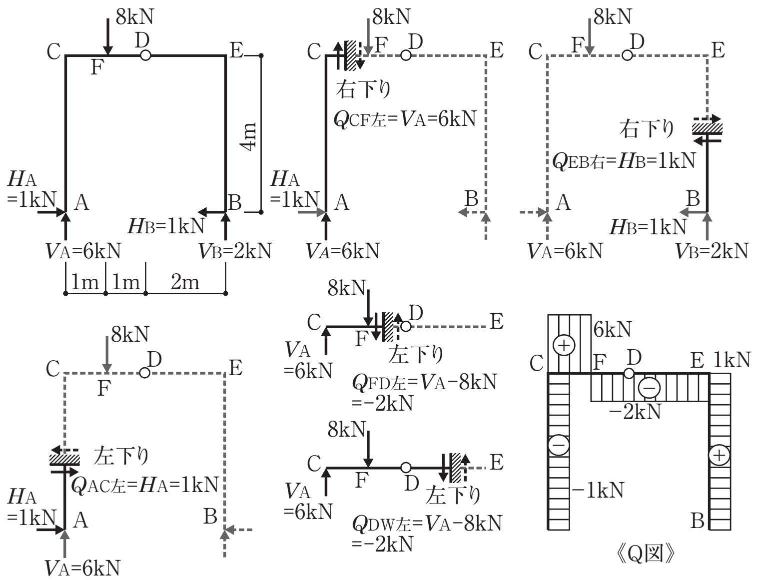
Q_{FE} ＝ 6 kN － 8 kN

＝ － 2 kN（⇵⊖）

EB 間　右側で計算する。

右側には、H_B のみ作用する。

Q_{EB} ＝ 1 kN（⇄⊕）



《Q図》

⑶　曲げモーメント（M）

荷重点間では、曲げモーメントは一定又は一様に変化することから、各節点ごとに曲げモーメントを求め、その点を結べば、モーメント図を求めることができる。その時、ピン節点の D 点では必ず曲げモーメントはゼロとなる点に注意する。

各点の曲げモーメントをモーメント図を同時に描きながら、求めてみよう。

A点、B点、D点

$M_A = M_B = M_D = 0$

C 点

$M_C = -H_A \times 4\,\text{m}$

$= -1\,\text{kN} \times 4\,\text{m}$

$= -4\,\text{kN·m}$ （外側凸）

F 点

H_A と V_A のモーメントの総和である。

$M_F = V_A \times 1\,\text{m} - H_A \times 4\,\text{m}$

$= 6\,\text{kN} \times 1\,\text{m} - 1\,\text{kN} \times 4\,\text{m}$

$= 2\,\text{kN·m}$ （下凸）

図のように、ＣＦ間の途中で、凸側が梁の上端から下端に変わる。

D 点

$M_D = 0$

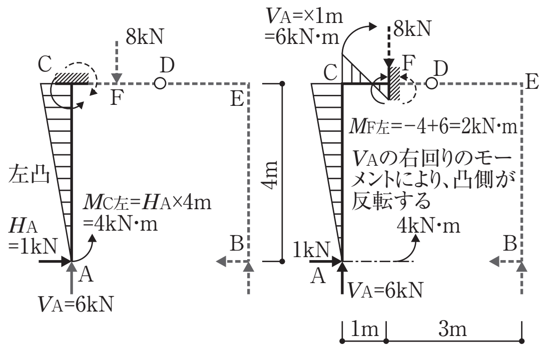
E 点

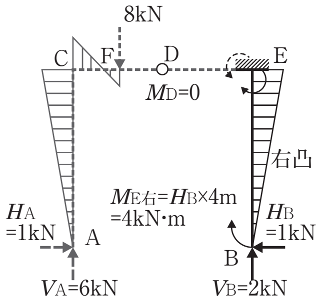
右側で計算すると、

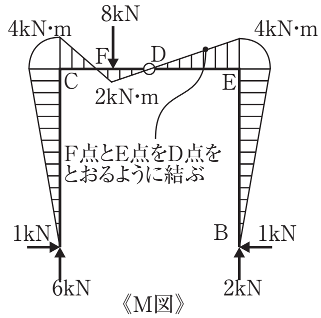
$M_E = H_B \times 4\,\text{m}$

$= 1\,\text{kN} \times 4\,\text{m}$

$= 4\,\text{kN·m}$ （外側凸）



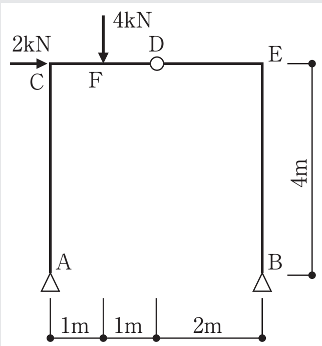




《M図》

Check Point ケーススタディ

❶次のラーメンのE点の曲げモーメントを求めよ。



〔解答〕

《反力を仮定し、求める》

$\Sigma M_A = 0$ より、

$2\text{kN} \times 4\text{m} + 4\text{kN} \times 1\text{m} - V_B \times 4\text{m} = 0$

$\therefore V_B = 3\text{kN}$

$\Sigma Y = 0$ より、

$V_A + V_B - 4\text{kN} = V_A + 3\text{kN} - 4\text{kN} = 0$

$\therefore V_A = 1\text{kN}$

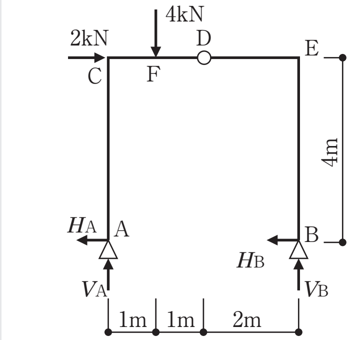
$M_D = 0$ より、D 点の右側で計算する

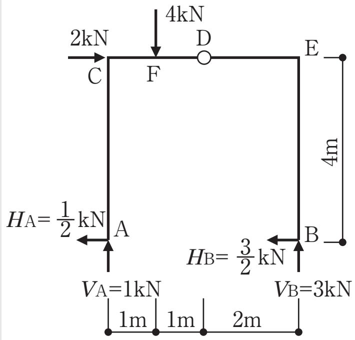
（右側の方が計算が簡便である）

$- V_B \times 2\text{m} + H_B \times 4\text{m} = 0$

$- 6\text{kN·m} + 4H_B = 0$

$$\therefore H_B = \frac{6\text{kN・m}}{4\text{m}} = \frac{3}{2}\text{kN}$$





《E 点の曲げモーメントを求める》

$$M_E = H_B \times 4\text{m} = \frac{3}{2}\text{kN} \times 4\text{m} = 6\text{kN・m}$$

《各点の曲げモーメントを求めM図を描いてみよう》

残った反力 H_A を求める。

$\Sigma X = 0$ より、

$2\text{kN} - H_A - H_B = 0$

$$\therefore H_A = \frac{1}{2}\text{kN}$$

《各点の曲げモーメントを求める。》

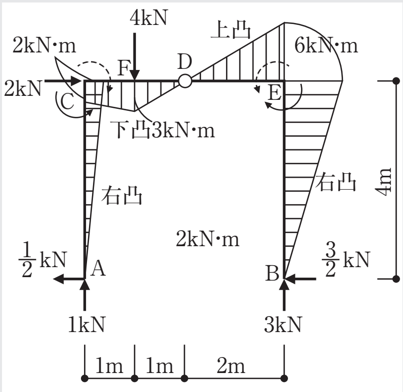
全ての外力が明らかになったところで、各点の曲げモーメントを片側から計算し、求めていく。なお、M_A、M_D、M_B の曲げモーメントは0である。

$$M_C = \frac{1}{2}\text{kN} \times 4\text{m} = 2\text{kN・m}$$

$$M_F = \frac{1}{2}\text{kN} \times 4\text{m} + 1\text{kN} \times 1\text{m}$$

$$= 3\text{kN・m}$$

$$M_E = 6\text{kN・m}$$



《M図》

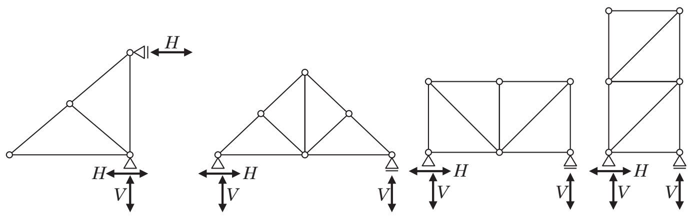
図のような曲げモーメント図となる。

第５節　静定トラス

1．トラス構造

トラス構造とは、節点がピンで部材を三角形に組み立てた構造骨組みをいい、片持ち梁系トラスと単純梁系トラスがある。トラス構造は、三角形に組み立てることで、軽量でもしっかりした骨組みを作ることができ、一般に屋根の小屋組みや、支点間距離の大きな梁を構成するのに用いられる。

また反力計算は、トラス骨組みを単一の部材（一つの剛体）として、単純梁又は静定ラーメンと同様に求めればよい。



2．トラスの応力

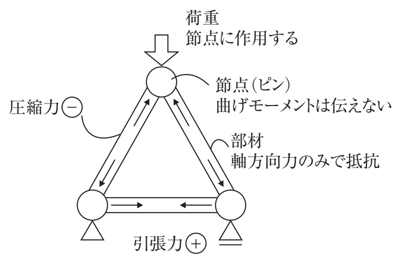
部材に生じる力（応力）を求める（トラスを解く）場合には、次の仮定を前提とする。

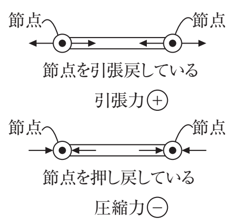
静定トラスの仮定	①	三角形からなる節点がピンの骨組みである。
	②	外力は、節点に作用する。
	③	部材は直線で、座屈はしないものとする。

以上の仮定から、トラスの部材に生じる力は、引張力か圧縮力の軸方向力のみとなる。せん断力と曲げモーメントは生じない。

静定トラスの応力	**①部材に生ずる力は、軸方向力（引張力か圧縮力）のみ**
	②節点に集まる力は、つり合っている

軸方向力の表示は、図のように、部材両端の**節点に作用する一対の力**で表示する。引張力か圧縮力であるかは、**節点を基準として考えて、節点を引張戻している場合が引張力（＋）、節点を押し戻している場合が圧縮力（－）**とする。

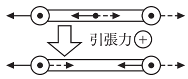




トラス部材の応力表示法

トラス部材に生じる応力は、節点に作用する力と同じなので、節点に作用する一対の力で表現している。

通常の応力の表示



節点に作用する力で表示

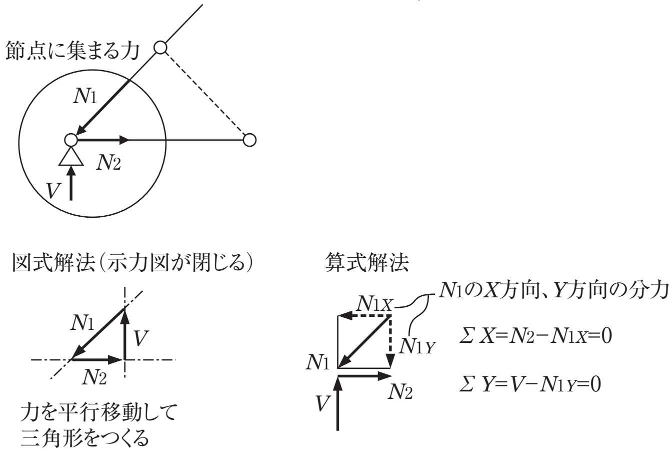
３．トラス部材の節点の性質

1 節点のつり合い

　静定トラスの各節点に集まる力、つまり、外力（荷重・反力）、節点に作用する部材応力はつり合う。

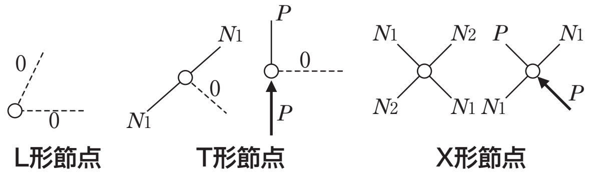
　したがって、図のような支点反力 V と部材応力 N_1、N_2 の３力が作用する節点の場合、図式解法では、３力のつり合う条件として、力の三角形が閉じる。

　また、算式解法では、N_1 の X 方向、Y 方向の分力と反力 V、N_2 の４力について、$\Sigma X = 0$、$\Sigma Y = 0$ の関係が成立する。



2 節点の性質

　節点における力がつり合うことから、部材及び外力の集まる形状で、次のことがわかる。



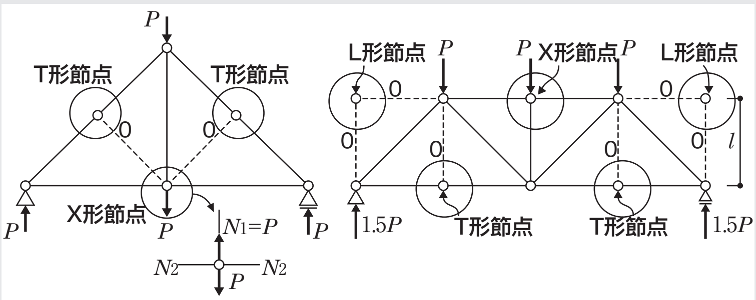
① L形節点：節点に２つの力（部材）のみが作用する場合（一直線は除く）は、２つの力とも零になる（ゼロ部材又はゼロメンバーという）。

② T形節点：節点に３つの力（部材）が作用し、２つの力が一直線の場合、他の力は零になる（ゼロ部材又はゼロメンバーという）。

③ X形節点：節点に４つの力（部材）がそれぞれ一直線で接合している場合、一直線どうしがそれぞれつり合っている。

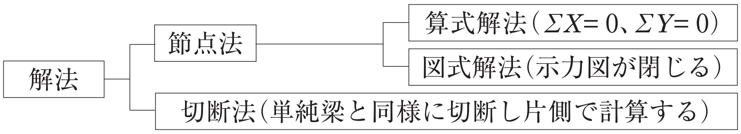
Check Point

節点の形状から、応力がわかる。０メンバーの見付け方



4．トラスの解法

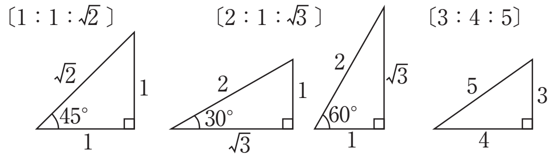
トラス部材の軸方向力を求める方法に、節点法と切断法がある。



一般に、全体の複数部材の応力を求める場合は、節点法を用い、トラス骨組みの一部の応力を求める場合は、切断法を用いることが多い。

また、試験に出題されるトラス骨組みの寸法は、直角三角形の辺の比に合せて作成されているので、解答において、下記の比は絶対に覚えておかなければならない。

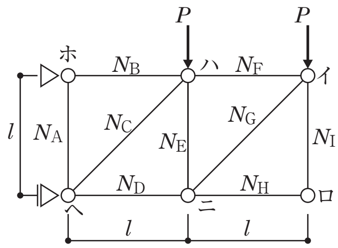
〔直角三角形の辺の比〕



1 節点法

次の片持ち梁系トラスで解説する。

節点法は、各節点に集まる力がつり合っていることを利用する解法である。各部材の応力を N_A ～ N_I、各節点をイ～ヘとして、各節点ごとに力を解明していく。



① 反力を求める

$\Sigma Y = 0$ より、$V_{ホ} - P - P = 0$

$\therefore V_{ホ} = 2P$（上向き）

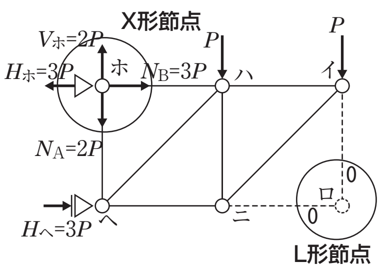
$\Sigma M_{ヘ} = 0$ より、 $2Pl + Pl - H_{ホ}\,l = 0$

$\therefore H_{ホ} = 3P$（仮定どおり左向き）

$\Sigma X = 0$ より、 $H_{ヘ} - H_{ホ} = 0$ より、

$H_{ヘ} = 3P$（仮定どおり右向き）

モーメントに対して、$H_{ヘ}$、$H_{ホ}$ の偶力が作用している。



② ゼロ部材を見つける

節点の外力と部材の形状で、L 形節点、又は T 形節点を見つけることで、応力が 0 となる部材を見つけることができる。

節点ロが L 形節点であり、$N_H = N_I = 0$

また、節点ホが X 形節点なので、

$N_B = H_{ホ} = 3P$（節点を引張戻しているので引張力）

$N_A = V_{ホ} = 2P$（節点を引張戻しているので引張力）

③　節点法で、応力を求める

各節点ごとに、次の手順で応力を求めていく。

〔節点法の解法手順〕

①力の少ない３力の節点から、順番に求め進めていく。

②３力～４力の節点は、図式解法（示力図）により、「力の三角形」又は「力の四角形」を閉じて、直角三角形の辺の比を用いて求めるのが効率的。

③４力～５力の多くの力が集まる節点では、算式解法により、一点に作用する力のつり合い条件式（$\Sigma X = 0$、$\Sigma Y = 0$）から求めるのが効率的。

⑴　節点イのつり合い

節点イに作用する荷重 P、N_F、N_G の３力はつり合っている。

力を平行移動して、力の三角形（示力図）を閉じる。

図のように、骨組み部材をそのまま利用して、描くのが効率的である。

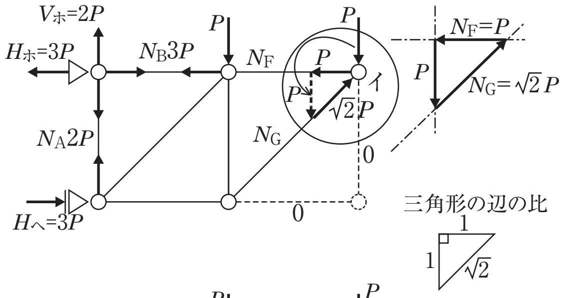
骨組みの寸法から、力の三角形の辺の比が１：１：$\sqrt{2}$ であることから、

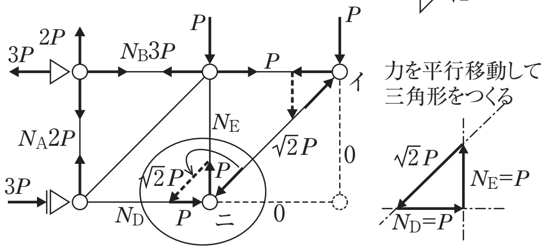
$N_F = P$（節点を引張戻しているので、引張力）

$N_G = \sqrt{2}\,P$（節点を押し戻しているので、圧縮力）

であることがわかる。

また、N_F、N_G は両端の節点に作用する一対の力であるから、図のように、節点ハ、節点ニにも作用する。





⑵　節点ニのつり合い

次に、３力の作用する節点ニで、N_G、N_D、N_E の３力で示力図を描く。

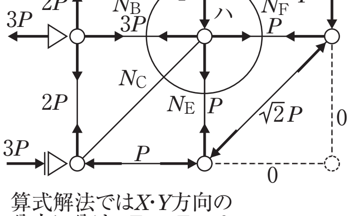
この場合も、骨組みを使うと効率が良い。同じく三角形の辺の比から、

$N_D = P$（節点ニを押し戻しているので、圧縮力）

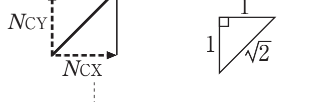
$N_E = P$（節点ニを引張戻しているので、引張力）

⑶　節点ハのつり合い

節点ハにおいて、荷重Ｐ及び、$N_F = P$、$N_E = P$、N_C、$N_B = 3P$ の５力のつり合いを考える。このように力の数が多い場合は、算式解法が適している。



算式解法ではX･Y方向の分力に分け、ΣX、ΣY=0のつり合いから求める



〔算式解法〕

節点ハにおいて、N_C を図のように X 方向･Y 方向の分力、N_{CX}･N_{CY} に分ける。節点ハにおける力のつり合いから、

$\Sigma Y = 0$ より、

$-P - N_E + N_{CY} = 0$

$-P - P + N_{CY} = 0$　　$\therefore N_{CY} = 2P$（仮定のとおり上向き）

したがって、N_C の分力が２P であれば、三角形の辺の比から、

$N_C = \sqrt{2} \times N_{CY} = 2\sqrt{2}\ P$（節点ハを押し戻している圧縮力）

〔図式解法〕

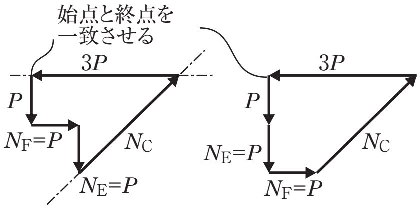
５力のうち、４力は大きさ、向きがわかっているので、図式解法でも簡単に示力図を描くことができる。図のように明らかな力から右回りの順に、平行移動していき、示力図を閉じる。

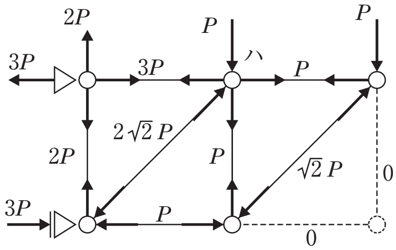
後は、三角形の辺の比から、求めることになる。

$N_C = 2\sqrt{2}\ P$（節点を押し戻しているので、圧縮力）

なお、すべての部材応力を示した図は、右のようになる。

図式解法では、明らかな力から、平行移動して、多角形の始点と終点を一致させる
・力を右回りに順に並べていくとかける。
・多角形の形にこだわる必要はない。



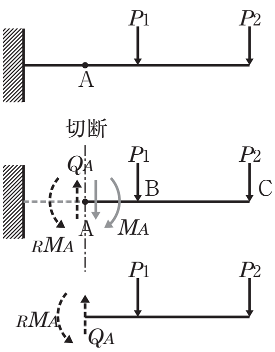


2 切断法

①　切断法の考え方

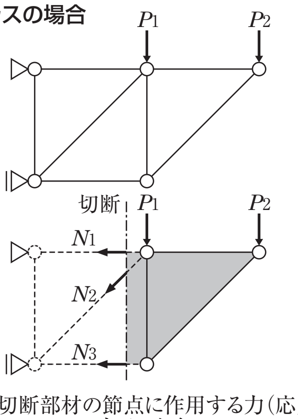
切断法の考え方は、単純梁の応力で学習した原理と同じである。求める点で、切断し、片側で計算するだけである。

静定梁の場合



鉛直荷重P_1、P_2とA点に生じる力
M_AとQ_Aはつり合っている
〔$\Sigma X=0$、$\Sigma Y=0$、$\Sigma M=0$〕

静定トラスの場合



P_1、P_2と切断部材の節点に作用する力（応力）
N_1、N_2、N_3の5つの力はつり合っている
〔$\Sigma X=0$、$\Sigma Y=0$、$\Sigma M=0$〕

図に、静定の片持ち梁と片持ち梁系トラスを示した。静定梁の場合、求める点で切断し、片側（この場合は自由端）で計算して応力を求める。したがって、図のように鉛直荷重 P_1、P_2 と A 点の応力（せん断力 Q_A と曲げモーメント $_RM_A$）は、つり合い条件式〔$\Sigma X = 0$、$\Sigma Y = 0$、$\Sigma M = 0$〕を満足している。

トラスの場合も同様である。図のように切断した部材が節点に作用する力 N_1、N_2、N_3、と鉛直荷重 P_1、P_2 の５つの力は、つり合い、つり合い条件式〔$\Sigma X = 0$、$\Sigma Y = 0$、$\Sigma M = 0$〕を満足する。

②　切断法による解法手順

〔切断法の解法手順〕

①反力を求める。（片持ち梁は反力を求めなくても自由端側で計算できる）

②求める部材を含む３部材で切断する。

・つり合い条件式が３式なので、未知数は３つまで。

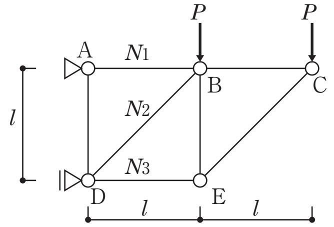
③片側を選択し、部材の応力を仮定する。

・外力の少ない側を選択する方が効率的（片持ち梁は自由端側）

・仮定の向きは、とりあえず引張力としてよい。数値が（−）であれば、仮定と反対の向きであることがわかる。

④力のつり合い条件式〔$\Sigma X = 0$、$\Sigma Y = 0$、任意の点で$\Sigma M = 0$〕から、部材応力を求める。

次の図の片持ち梁系トラスの N_1、N_2、N_3、を求める。

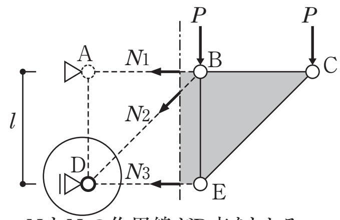


⑴　求める部材を含み切断

片持ち梁なので、反力計算は省略し、自由端側で計算する。

N_1、N_2、N_3、を引張力（節点を引張戻す方向）に仮定する。

この時、N_1、N_2、N_3、P_1、P_2 の５つの力は、つり合っている。
力のつり合いで学習した、５力のつり合い問題である。



N_2とN_3の作用線がD点をとおる
⇒N_2とN_3によるモーメントが生じない

⑵　２力の作用線がとおる点で、モーメントのつり合いを考える

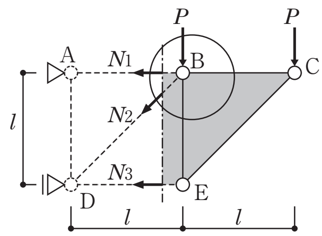
２力の作用線がとおる点では、その２力によるモーメントは生じない。したがって、$\Sigma M = 0$ 式において、未知数を１つに絞ることができる。

・D 点で$\Sigma M_D = 0$

N_2、N_3 の作用線がとおるので、この２力のモーメントは生じない。

$\Sigma M_D = P \times 2l + P \times l - N_1 \times l = 0$

$\therefore N_1 = 3P$（仮定の向きどおりＢ節点を引張戻しているので引張力）



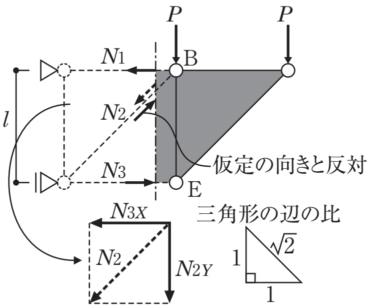
N_1とN_2の作用線がB点をとおる
⇒N_1とN_2によるモーメントが生じない

・Ｂ点で$\Sigma M_B = 0$

N_1、N_2 の作用線がとおるので、この２力のモーメントは生じない。

$\Sigma M_B = P \times l + N_3 \times l = 0$

$\therefore N_3 = -P$（−なので、仮定の向きと反対に、Ｅ節点を押し戻しているので圧縮力）



$\Sigma Y=0 \Rightarrow -P-N_{2Y}=0$

⑶　斜材を求める場合は、$\Sigma X = 0$、又は$\Sigma Y = 0$を使う

斜材は、作用線までの距離が求めづらいので、N_2 を図のように X 方向、Y 方向の分力、N_{2X}、N_{2Y} に分けてつり合いを考える。

この問題の場合は、鉛直方向の外力は、下向きに合計$2P$なので、

$\Sigma Y = -P - P - N_{2Y} = 0$

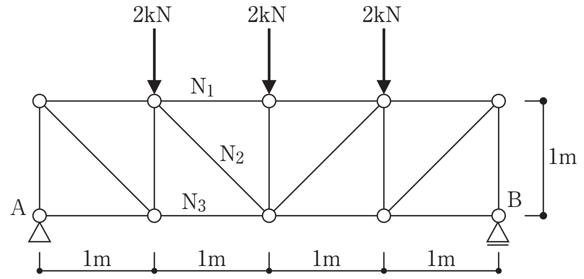
$\therefore N_{2Y} = -2P$（－なので、仮定の向きと反対に、上向き）

したがって、三角形の辺の比から、$N_2 = \sqrt{2}\ N_{2Y} = 2\sqrt{2}\ P$

（B節点を押し戻している圧縮力）

③　切断法による解法手順（単純梁の例）

次の平行弦トラスにおいて、N_1、N_2、N_3 を求める。

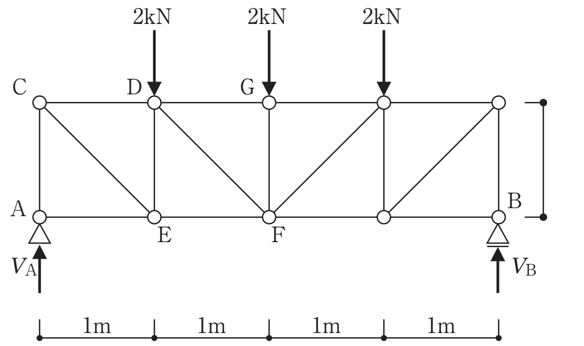


⑴　反力を仮定して求める。

$$V_A = V_B = \frac{6\text{kN}}{2} = 3\text{kN}$$

⑵　応力を求める。

N_1、N_2、N_3 を含んで切断し、左側で計算する。



・$\Sigma M_F = 0$ により、N_1 を求める。

$3\,\text{kN} \times 2\,\text{m} - 2\,\text{kN} \times 1\,\text{m} + N_1 \times 1\,\text{m} = 0$

$4\,\text{kN·m} + N_1 \times 1\,\text{m} = 0$

$N_1 = -4\,\text{kN}$（仮定の向きとは逆向き）

N_1 は、D 節点を押し戻しているので、

<u>圧縮力　4 kN</u>

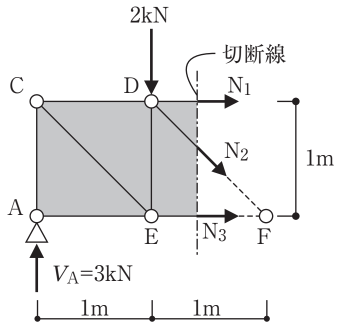
・$\Sigma M_D = 0$ により、N_3 を求める。

$3\,\text{kN} \times 1\,\text{m} - N_3 \times 1\,\text{m} = 0$

$\therefore N_3 = 3\,\text{kN}$（仮定どおりの向き）

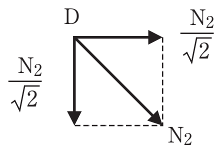
E 節点を引張り戻しているので、

<u>引張力　3 kN</u>



・$\Sigma Y = 0$ により、N_2 を求める。

N_2 を X 方向、Y 方向に分解する。



$$V_A - 2\text{kN} - \frac{N_2}{\sqrt{2}} = 0$$

$$3\text{kN} - 2\text{kN} - \frac{N_2}{\sqrt{2}} = 0$$

$$1\text{kN} - \frac{N_2}{\sqrt{2}} = 0$$

$\therefore\quad N_2 = \sqrt{2}\ \text{kN}$（仮定どおりの向き）

D 節点を引張り戻しているので、

<u>引張力 $\sqrt{2}$ kN</u>